

**EGZAMIN MATURALNY
W ROKU SZKOLNYM 2017/2018**

MATEMATYKA

POZIOM PODSTAWOWY

FORMUŁA DO 2014

(„STARA MATURA”)

ZASADY OCENIANIA ROZWIĄZAŃ ZADAŃ

ARKUSZ MMA-P1

MAJ 2018

Zadania zamknięte

Punkt przyznaje się za wskazanie poprawnej odpowiedzi (zaznaczenie właściwego pola na karcie odpowiedzi).

Zadanie 1. (0–1)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe	Poprawna odp. (1 p.)	
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	1. Liczby rzeczywiste. Zdający zna definicję logarytmu i stosuje w obliczeniach wzory na logarytm iloczynu, logarytm ilorazu i logarytm potęgi o wykładniku naturalnym (1.h).	Wersja I	Wersja II
		B	D

Zadanie 2. (0–1)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	1. Liczby rzeczywiste. Zdający planuje i wykonuje obliczenia na liczbach rzeczywistych; w szczególności oblicza pierwiastki (1.a).	Wersja I	Wersja II
		C	A

Zadanie 3. (0–1)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	1. Liczby rzeczywiste. Zdający oblicza potęgi o wykładnikach wymiernych oraz stosuje prawa działań na potęgach o wykładnikach wymiernych i rzeczywistych (1.g).	Wersja I	Wersja II
		C	D

Zadanie 4. (0–1)

III. Modelowanie matematyczne.	1. Liczby rzeczywiste. Zdający stosuje pojęcie procentu i punktu procentowego w obliczeniach (1.d).	Wersja I	Wersja II
		C	A

Zadanie 5. (0–1)

I. Wykorzystanie i tworzenie informacji	2. Wyrażenia algebraiczne. Zdający dodaje, odejmuje, mnoży i dzieli wyrażenia wymierne (2.f).	Wersja I	Wersja II
	1. Liczby rzeczywiste. Zdający posługuje się pojęciem osi liczbowej i przedziału liczbowego; zaznacza przedziały na osi liczbowej (1.e).	A	C

Zadanie 6. (0–1)

I. Wykorzystanie i tworzenie informacji	4. Funkcje. Zdający wyznacza miejsca zerowe funkcji kwadratowej (4.j).	Wersja I	Wersja II
		C	D

Zadanie 7. (0–1)

I. Wykorzystanie i tworzenie informacji	3. Równania i nierówności. Zdający rozwiązuje proste równania wymierne, prowadzące do równań liniowych lub kwadratowych (3.e).	Wersja I	Wersja II
		D	B

Zadanie 8. (0–1)

I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	4. Funkcje. Zdający sporządza wykresy funkcji liniowych (4.e).	Wersja I	Wersja II
		D	B

Zadanie 9. (0–1)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	4. Funkcje. Zdający sporządza wykresy funkcji kwadratowych (4.h).	Wersja I	Wersja II
		C	D

Zadanie 10. (0–1)

I. Wykorzystanie i tworzenie informacji	4. Funkcje. Zdający wyznacza wzór funkcji liniowej (4.f).	Wersja I	Wersja II
		D	A

Zadanie 11. (0–1)

III. Modelowanie matematyczne.	5. Ciągi liczbowe. Zdający bada, czy dany ciąg jest arytmetyczny lub geometryczny (5.b).	Wersja I	Wersja II
		A	B

Zadanie 12. (0–1)

III. Modelowanie matematyczne.	5. Ciągi liczbowe. Zdający stosuje wzory na n -ty wyraz i sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego i ciągu geometrycznego (5.c).	Wersja I	Wersja II
		A	C

Zadanie 13. (0–1)

III. Modelowanie matematyczne.	5. Ciągi liczbowe. Zdający stosuje wzory na n -ty wyraz i sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego i ciągu geometrycznego (5.c).	Wersja I	Wersja II
		B	A

Zadanie 14. (0–1)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	6. Trygonometria. Zdający wykorzystuje definicje i wyznacza wartości funkcji trygonometrycznych dla kątów ostrych (6.a).	Wersja I	Wersja II
		C	D

Zadanie 15. (0–1)

I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	7. Planimetria. Zdający wykorzystuje własności figur podobnych w zadaniach, w tym umieszczonych w kontekście praktycznym (7.b).	Wersja I	Wersja II
		A	C

Zadanie 16. (0–1)

IV. Użycie i tworzenie strategii.	7. Planimetria. Zdający korzysta ze związków między kątem środkowym, kątem wpisanym i kątem między styczną a cięciwą okręgu (7.a).	Wersja I	Wersja II
		A	B

Zadanie 17. (0–1)

III. Modelowanie matematyczne.	7. Planimetria. Zdający znajduje związki miarowe w figurach płaskich, także z zastosowaniem trygonometrii, również w zadaniach umieszczonych w kontekście praktycznym (7.c).	Wersja I	Wersja II
		B	D

Zadanie 18. (0–1)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	8. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zdający posługuje się równaniem okręgu $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ (8.g).	Wersja I	Wersja II
		B	A

Zadanie 19. (0–1)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	8. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zdający bada równoległość i prostopadłość prostych na podstawie ich równań kierunkowych (8.c).	Wersja I	Wersja II
		B	C

Zadanie 20. (0–1)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	9. Stereometria. Zdający wskazuje i oblicza kąt między ścianami wielościanu, między ścianami i odcinkami oraz między odcinkami takimi jak krawędzie, przekątne, wysokości (9.a).	Wersja I	Wersja II
		D	A

Zadanie 21. (0–1)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	9. Stereometria. Zdający wskazuje i oblicza kąt między ścianami wielościanu, między ścianami i odcinkami oraz między odcinkami takimi jak krawędzie, przekątne, wysokości (9.a).	Wersja I	Wersja II
		A	C

Zadanie 22. (0–1)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	9. Stereometria. Zdający wyznacza związki miarowe w wielościanach i bryłach obrotowych (9.b).	Wersja I	Wersja II
		A	C

Zadanie 23. (0–1)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	10. Elementy statystyki opisowej. Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka. Zdający oblicza średnią arytmetyczną, średnią ważoną, medianę i odchylenie standardowe danych; interpretuje te parametry dla danych empirycznych (10.a).	Wersja I	Wersja II
		B	D

Zadanie 24. (0–1)

III. Modelowanie matematyczne.	10. Elementy statystyki opisowej. Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka. Zdający zlicza obiekty w prostych sytuacjach kombinatorycznych, niewymagających użycia wzorów kombinatorycznych; stosuje zasadę mnożenia (10.b).	Wersja I	Wersja II
		D	B

Zadanie 25. (0–1)

III. Modelowanie matematyczne.	10. Elementy statystyki opisowej. Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka. Zdający wykorzystuje własności prawdopodobieństwa i stosuje twierdzenie znane jako klasyczna definicja prawdopodobieństwa do obliczania prawdopodobieństw zdarzeń (10.d).	Wersja I	Wersja II
		D	B

Ogólne zasady oceniania zadań otwartych

Uwaga: Akceptowane są wszystkie odpowiedzi merytorycznie poprawne i spełniające warunki zadania.

Zadanie 26. (0–2)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	3. Równania i nierówności. Zdający rozwiązuje równania i nierówności kwadratowe; zapisuje rozwiązanie w postaci sumy przedziałów (3.a).
--	---

Przykładowe rozwiązanie

Rozwiązanie nierówności kwadratowej składa się z dwóch etapów.

Pierwszy etap to wyznaczenie pierwiastków trójmianu kwadratowego $2x^2 - 3x - 5$.

Drugi etap to zapisanie zbioru rozwiązań nierówności kwadratowej.

Pierwszy etap rozwiązania może zostać zrealizowany następująco:

- zapisujemy nierówność w postaci $2x^2 - 3x - 5 > 0$ i obliczamy pierwiastki trójmianu kwadratowego $2x^2 - 3x - 5$
 - obliczamy wyróżnik tego trójmianu:
 $\Delta = 9 - 4 \cdot 2 \cdot (-5) = 49$ i stąd $x_1 = \frac{3-7}{4} = -1$ oraz $x_2 = \frac{3+7}{4} = \frac{5}{2}$
- albo
 - stosujemy wzory Viète'a:
 $x_1 \cdot x_2 = -\frac{5}{2}$ oraz $x_1 + x_2 = \frac{3}{2}$, stąd $x_1 = -1$ oraz $x_2 = \frac{5}{2}$.

Drugi etap rozwiązania: podajemy zbiór rozwiązań nierówności: $(-\infty, -1) \cup (\frac{5}{2}, +\infty)$ lub

$$x \in (-\infty, -1) \cup (\frac{5}{2}, +\infty).$$

Schemat punktowania

Zdający otrzymuje **1 p.**
gdy:

- zrealizuje pierwszy etap rozwiązania i na tym zakończy lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności, np.
 - obliczy lub poda pierwiastki trójmianu kwadratowego $x_1 = -1$ i $x_2 = \frac{5}{2}$ i na tym zakończy lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności,
 - zaznaczy na wykresie miejsca zerowe funkcji $f(x) = 2x^2 - 3x - 5$ i na tym zakończy lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności

albo

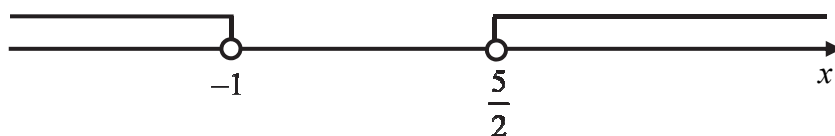
- realizując pierwszy etap popełni błędy, ale otrzyma nierówność, w której po jednej stronie występuje pełny trójmian kwadratowy posiadający dwa różne pierwiastki i konsekwentnie do popełnionych błędów wyznaczy zbiór rozwiązań nierówności.

Zdający otrzymuje **2 p.**
gdy:

- poda zbiór rozwiązań nierówności: $(-\infty, -1) \cup (\frac{5}{2}, +\infty)$ lub $x \in (-\infty, -1) \cup (\frac{5}{2}, +\infty)$,
lub $x < -1 \vee x > \frac{5}{2}$

albo

- poda zbiór rozwiązań nierówności w postaci graficznej z poprawnie zaznaczonymi końcami przedziałów



Uwagi

1. Jeżeli zdający wyznacza pierwiastki trójmianu kwadratowego w przypadku, gdy obliczony wyróżnik Δ jest ujemny, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.
2. Jeżeli zdający podaje pierwiastki bez związku z trójmianem kwadratowym z zadania, to oznacza, że nie podjął realizacji 1. etapu rozwiązania i w konsekwencji otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.
3. Akceptujemy zapisanie odpowiedzi w postaci: $x < -1$ i $x > \frac{5}{2}$, $x < -1$ oraz $x > \frac{5}{2}$, itp.
4. Jeżeli zdający poprawnie obliczy pierwiastki trójmianu $x_1 = -1$, $x_2 = \frac{5}{2}$ i błędnie zapisze odpowiedź, np. $x \in (-\infty, 1) \cup (\frac{5}{2}, +\infty)$, popełniając tym samym błąd przy przepisywaniu jednego z pierwiastków, to otrzymuje **2 punkty**.
5. Jeżeli zdający po poprawnym rozwiązaniu nierówności zapisuje w odpowiedzi, jako zbiór rozwiązań, zbiór, zawierający elementy nienależące do zbioru $(-\infty, -1) \cup (\frac{5}{2}, +\infty)$ lub zbiór pusty, to otrzymuje **1 punkt**. Zapisanie w miejscu przeznaczonym na odpowiedź pierwiastków trójmianu kwadratowego nie jest traktowane jak opis zbioru rozwiązań.

Kryteria uwzględniające specyficzne trudności w uczeniu się matematyki

Jeśli zdający pomyli porządek liczb na osi liczbowej, np. zapisze zbiór rozwiązań nierówności w postaci $(-\infty, \frac{5}{2}) \cup (-1, +\infty)$, $(+\infty, \frac{5}{2}) \cup (-1, -\infty)$, to przyznajemy **2 punkty**.

Zadanie 27. (0–2)

I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	3. Równania i nierówności. Zdający rozwiązuje równania wielomianowe metodą rozkładu na czynniki (3.d).
--	--

Przykładowe rozwiązania

I sposób

Zapisujemy lewą stronę równania w postaci iloczynowej, stosując metodę grupowania wyrazów

$$x^2(x-7) - 4(x-7) = 0 \text{ lub } x(x^2 - 4) - 7(x^2 - 4) = 0$$

$$\text{Stąd } (x^2 - 4)(x - 7) = 0, \text{ czyli } (x - 2)(x + 2)(x - 7) = 0.$$

Zatem $x = 2$ lub $x = -2$, lub $x = 7$.

II sposób

Stwierdzamy, że liczba 7 jest pierwiastkiem wielomianu $x^3 - 7x^2 - 4x + 28$. Dzielimy wielomian przez dwumian $x - 7$. Otrzymujemy iloraz $x^2 - 4$. Zapisujemy równanie w postaci $(x - 7)(x^2 - 4) = 0$. Stąd $(x - 7)(x - 2)(x + 2) = 0$, czyli $x = 2$ lub $x = -2$, lub $x = 7$.

Uwaga

Zdający może ustalić, że pierwiastkiem wielomianu jest:

- liczba 2 i zapisać równanie w postaci $(x - 2)(x^2 - 5x - 14) = 0$;
- liczba -2 i zapisać równanie w postaci $(x + 2)(x^2 - 9x + 14) = 0$.

Schemat punktowania

Zdający otrzymuje1 p.
gdy

- podzieli wielomian $x^3 - 7x^2 - 4x + 28$ przez dwumian $x - 7$, otrzyma iloraz $x^2 - 4$
albo

- podzieli wielomian $x^3 - 7x^2 - 4x + 28$ przez dwumian $x - 2$, otrzyma iloraz $x^2 - 5x - 14$,

albo

- podzieli wielomian $x^3 - 7x^2 - 4x + 28$ przez dwumian $x + 2$, otrzyma iloraz $x^2 - 9x + 14$,

albo

- zapisze lewą stronę równania w postaci iloczynu:
 $(x^2 - 4)(x - 7) = 0$ lub $(x - 2)(x + 2)(x - 7) = 0$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Zdający otrzymuje2 p.
gdy wyznaczy wszystkie rozwiązania równania: $x = 2$, $x = -2$, $x = 7$.

Uwaga

Jeżeli zdający w trakcie doprowadzania lewej strony równania do postaci iloczynu popełni więcej niż jedną usterkę, to za całe rozwiązanie otrzymuje **0 punktów**.

Zadanie 28. (0–2)

V. Rozumowanie i argumentacja.	2. Wyrażenia algebraiczne. Zdający posługuje się wzorami skróconego mnożenia (2.a).
--------------------------------	---

Przykładowe rozwiązania

I sposób

Nierówność możemy przekształcić równoważnie

$$\frac{a+b}{2ab} \geq \frac{2}{a+b}.$$

Ponieważ liczby a i b są dodatnie, więc $a+b > 0$ i $2ab > 0$. Mnożąc obie strony nierówności przez $2ab(a+b)$, otrzymujemy

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &\geq 4ab, \\ a^2 + 2ab + b^2 &\geq 4ab, \\ a^2 - 2ab + b^2 &\geq 0, \\ (a-b)^2 &\geq 0.\end{aligned}$$

Ta nierówność jest prawdziwa dla dowolnych liczb rzeczywistych a i b , więc w szczególności również dla liczb dodatnich. To kończy dowód.

II sposób

Nierówność możemy przekształcić równoważnie

$$\begin{aligned}\frac{a+b}{2ab} - \frac{2}{a+b} &\geq 0, \\ \frac{(a+b)^2 - 4ab}{2ab(a+b)} &\geq 0.\end{aligned}$$

Ponieważ liczby a i b są dodatnie, więc $a+b > 0$ i $2ab > 0$. Mnożąc obie strony nierówności przez $2ab(a+b)$, otrzymujemy

$$\begin{aligned}(a+b)^2 - 4ab &\geq 0, \\ a^2 + 2ab + b^2 - 4ab &\geq 0, \\ a^2 - 2ab + b^2 &\geq 0, \\ (a-b)^2 &\geq 0.\end{aligned}$$

Ta nierówność jest prawdziwa dla dowolnych liczb rzeczywistych a i b , więc w szczególności również dla liczb dodatnich. To kończy dowód.

Schemat punktowania

Zdający otrzymuje 1 p.

gdy zapisze nierówność w postaci $(a+b)^2 \geq 4ab$ lub $(a+b)^2 - 4ab \geq 0$, lub

$\frac{(a+b)^2 - 4ab}{2ab(a+b)} \geq 0$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Zdający otrzymuje 2 p.

gdy przeprowadzi pełne rozumowanie.

Uwagi

1. Jeżeli zdający sprawdza prawdziwość nierówności jedynie dla wybranych wartości a i b , to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.
2. Jeżeli zdający zakończy rozumowanie, zapisując nierówność $a^2 + b^2 \geq 2ab$ i nie powoła się na stosowne twierdzenie, to otrzymuje **1 punkt**.
3. Jeżeli zdający przeprowadzi poprawne rozumowanie, które zakończy zapisaniem nierówności $(a-b)^2 \geq 0$, to otrzymuje **2 punkty**.

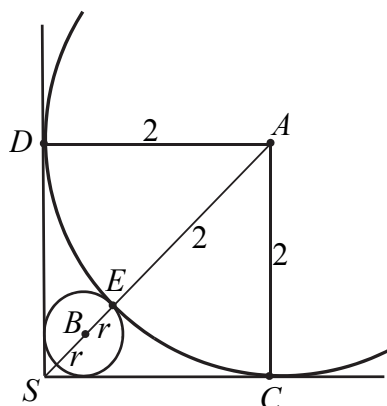
Zadanie 29. (0–4)

V. Rozumowanie i argumentacja.

7. Planimetria. Zdający znajduje związki miarowe w figurach płaskich, także z zastosowaniem trygonometrii, również w zadaniach umieszczonych w kontekście praktycznym (7.c).

Przykładowe rozwiązaniaI sposób

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Wtedy $|AS| = 2\sqrt{2}$ oraz $|AE| = 2$. Zatem

$$|SE| = 2\sqrt{2} - 2.$$

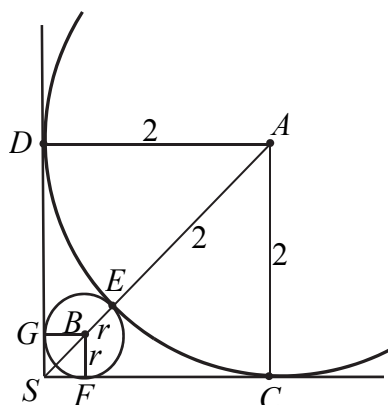
Średnica okręgu o środku B i promieniu r jest krótsza od odcinka SE , więc

$$2r < 2\sqrt{2} - 2, \text{ czyli } r < \sqrt{2} - 1.$$

Co kończy dowód.

II sposób

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Wtedy $|AS| = 2\sqrt{2}$, $|BS| = r\sqrt{2}$ oraz $|AE| = 2$.

Ponieważ $|AS| = |BS| + |BE| + |AE|$, więc otrzymujemy

$$2\sqrt{2} = r\sqrt{2} + r + 2,$$

$$r(\sqrt{2} + 1) = 2\sqrt{2} - 2.$$

Stąd mnożąc obie strony tego równania przez $\sqrt{2}-1$ otrzymujemy

$$r(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1) = 2(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}-1),$$

$$r = 2(\sqrt{2}-1)^2,$$

$$r = 2(2-2\sqrt{2}+1),$$

$$r = 2(3-2\sqrt{2}).$$

Sprawdźmy, czy $2(3-2\sqrt{2}) < \sqrt{2}-1$.

Przekształcamy tę nierówność równoważnie.

$$6-4\sqrt{2} < \sqrt{2}-1$$

$$7 < 5\sqrt{2}$$

Ponieważ $\sqrt{2} \approx 1,41 > 1,4$, więc $5\sqrt{2} > 7$. Oznacza to, że $r < \sqrt{2}-1$.

Schemat punktowania

Zdający otrzymuje 1 p.

gdy:

- obliczy $|SE| = 2\sqrt{2}-2$

albo

- zapisze równość $2\sqrt{2} = r\sqrt{2} + r + 2$.

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Zdający otrzymuje 2 p.

gdy przeprowadzi pełny dowód.

Uwagi

1. Jeżeli zdający poprawnie obliczy r i zapisze wynik w postaci ułamka, w którym

w mianowniku występuje liczba niewymierna, np. $r = \frac{2\sqrt{2}-2}{\sqrt{2}+1}$, i błędnie szacuje tę liczbę,

np. stosując takie same przybliżenia z niedomiarem $\sqrt{2}$ w liczniku i w mianowniku, to otrzymuje **1 punkt**.

2. Jeżeli zdający błędnie przyjmie, że długość odcinka, którego jednym końcem jest punkt styczności okręgów, a drugim wierzchołek kąta prostego, jest równa długości średnicy mniejszego okręgu i nie wycofa się z tego założenia oraz nie obliczy długości wspomnianego odcinka, to otrzymuje **0 punktów**.

Zadanie 30. (0–2)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	4. Funkcje. Zdający sporządza wykresy funkcji wykładniczych dla różnych podstaw i rozwiązuje zadania umieszczone w kontekście praktycznym (4.n). Zdający potrafi na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$ naszkicować wykresy funkcji $y = f(x + a)$, $y = f(x) + a$, $y = -f(x)$, $y = f(-x)$ (4.d).
--	---

Przykładowe rozwiązanie

Ponieważ punkt P leży na wykresie funkcji f , więc możemy zapisać:

$$9 = a^2, \text{ gdzie } a > 0.$$

Stąd $a = 3$.

Zbiorem wartości funkcji wykładniczej f jest przedział $(0, +\infty)$. Wykres funkcji g powstaje przez przesunięcie wykresu funkcji f o 2 jednostki w dół. Zatem zbiorem wartości funkcji g jest przedział $(-2, +\infty)$.

Schemat punktowania

Zdający otrzymuje 1 p.
gdy:

- obliczy a : $a = 3$

albo

- zapisze zbiór wartości funkcji g : $(-2, +\infty)$

i na tym zakończy lub dalej popelni błędy.

Zdający otrzymuje 2 p.

gdy obliczy a : $a = 3$ i zapisze zbiór wartości funkcji g : $(-2, +\infty)$.

Uwaga

Opis zbioru wartości uznaje się za poprawny, jeśli zbiór ten jest przedstawiony graficznie w sposób jednoznacznie wskazujący, że liczba -2 nie należy do tego zbioru, lub zbiór ten jest opisany słownie, lub jakkolwiek poprawną nierównością.

Kryteria uwzględniające specyficzne trudności w uczeniu się matematyki

Jeśli zdający pomyli porządek liczb na osi liczbowej, np. zapisze zbiór wartości funkcji w postaci $(+\infty, -2)$, to przyznajemy **2 punkty**, o ile obliczy $a = 3$.

Zadanie 31. (0–2)

III. Modelowanie matematyczne.	5. Ciągi liczbowe. Zdający stosuje wzory na n -ty wyraz i sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego i ciągu geometrycznego, również umieszczone w kontekście praktycznym (5.c).
--------------------------------	--

Przykładowe rozwiązania

I sposób

Korzystamy ze wzoru na n -ty wyraz ciągu arytmetycznego i zapisujemy wzór na a_{12} :

$$a_{12} = a_1 + (12 - 1) \cdot r .$$

Korzystamy ze wzoru na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego i zapisujemy wzór na S_{12} :

$$S_{12} = \frac{2a_1 + (12 - 1) \cdot r}{2} \cdot 12 .$$

Otrzymujemy układ równań

$$30 = a_1 + 11r \text{ i } 162 = 12a_1 + 66r .$$

Stąd otrzymujemy

$$a_1 = -3 .$$

II sposób

Korzystamy ze wzoru na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego i zapisujemy wzór na S_{12} :

$$S_{12} = \frac{a_1 + a_{12}}{2} \cdot 12 .$$

Otrzymujemy równanie

$$162 = \frac{a_1 + 30}{2} \cdot 12 .$$

Stąd otrzymujemy

$$a_1 = -3 .$$

Schemat punktowania

Zdający otrzymuje 1 p.
gdy:

- zapisze dwa równania z niewiadomymi a_1 i r wynikające z zastosowania poprawnych wzorów na n -ty wyraz ciągu arytmetycznego i sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego:

$$\text{np.: } 30 = a_1 + 11r \text{ i } 162 = \frac{2a_1 + 11 \cdot r}{2} \cdot 12$$

albo

- zapisze równanie z jedną niewiadomą a_1 wynikające z zastosowania poprawnego wzoru na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego bez wykorzystywania różnicy ciągu:

$$\text{np.: } 162 = \frac{a_1 + 30}{2} \cdot 12$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Zdający otrzymuje 2 p.
gdy zapisze równanie z jedną niewiadomą a_1 i obliczy pierwszy wyraz ciągu: $a_1 = -3$.

Uwagi

1. Jeżeli zdający, stosując metodę prób i błędów, zapisze poprawny ciąg poprzez wypisanie 12 początkowych kolejnych wyrazów i ustali, że $a_1 = -3$, to otrzymuje **2 punkty**.
2. Jeżeli zdający, stosując metodę prób i błędów, wypisze co najmniej trzy kolejne wyrazy i ustali, że $a_1 = -3$, ale nie zapisze wszystkich 12 początkowych wyrazów ciągu, to otrzymuje **1 punkt**.
3. Jeżeli zdający zapisze tylko $a_1 = -3$ lub $a_1 = -3$ i $r = 3$, to otrzymuje **0 punktów**.

Zadanie 32. (0–5)

IV. Użycie i tworzenie strategii.	8. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zdający podaje równanie prostej w postaci $Ax + By + C = 0$ lub $y = ax + b$, mając dane dwa jej punkty lub jeden punkt i współczynnik a w równaniu kierunkowym (8.b). Zdający interpretuje geometrycznie układ dwóch równań liniowych z dwiema niewiadomymi (8.d).
-----------------------------------	---

Przykładowe rozwiązania

I sposób – proste prostopadłe

Obliczamy współczynnik kierunkowy prostej AB

$$a_{AB} = \frac{1}{3}.$$

Ponieważ kąt prosty w trójkącie ABC jest przy wierzchołku B , więc wyznaczamy równanie prostej prostopadłej do prostej AB i przechodzącej przez punkt B

$$y = -3x + 35.$$

Obliczamy współrzędne punktu C , który jest punktem wspólnym prostych określonych równaniami $y = 2x + 3$ i $y = -3x + 35$:

$$\begin{cases} y = 2x + 3 \\ y = -3x + 35 \end{cases}$$

Stąd po rozwiązaniu układu równań otrzymujemy parę $x = \frac{32}{5}$ i $y = \frac{79}{5}$.

Zatem punkt C ma współrzędne $(\frac{32}{5}, \frac{79}{5})$

II sposób – twierdzenie Pitagorasa

Ponieważ wierzchołek C trójkąta prostokątnego ABC leży na prostej o równaniu $y = 2x + 3$, więc jego współrzędne zapisujemy następująco

$$C = (x, 2x + 3).$$

Punkt B jest wierzchołkiem kąta prostego, zatem z twierdzenia Pitagorasa wynika, że

$$|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2.$$

Po podstawieniu współrzędnych punktów A , B i C otrzymujemy równanie

$$(x-4)^2 + (2x+3-3)^2 = (10-4)^2 + (5-3)^2 + (x-10)^2 + (2x+3-5)^2,$$

czyli równanie

$$x^2 - 8x + 16 + 4x^2 = 36 + 4 + x^2 - 20x + 100 + 4x^2 - 8x + 4.$$

Zatem

$$20x = 128 \text{ i dalej } x = \frac{32}{5}.$$

Jeśli $x = \frac{32}{5}$, to $y = \frac{79}{5}$. Zatem $C = \left(\frac{32}{5}, \frac{79}{5}\right)$.

III sposób – iloczyn skalarny

Wektory niezerowe są prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy ich iloczyn skalarny jest równy 0. W tym przypadku oznacza to, że iloczyn skalarny wektorów \overrightarrow{AB} i \overrightarrow{BC} jest równy 0.

Współrzędne wektora \overrightarrow{AB} są równe $\overrightarrow{AB} = [6, 2]$.

Punkt C ma współrzędne równe $C = (x, 2x + 3)$, więc współrzędne wektora \overrightarrow{BC} są równe

$$\overrightarrow{BC} = [x-10, 2x+3-5].$$

Z warunku $\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{BC} = 0$ otrzymujemy równanie

$$6(x-10) + 2(2x-2) = 0,$$

$$3x - 30 + 2x - 2 = 0,$$

$$x = \frac{32}{5}.$$

Zatem $C = \left(\frac{32}{5}, 2 \cdot \frac{32}{5} + 3\right) = \left(\frac{32}{5}, \frac{79}{5}\right)$.

Schemat punktowania

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania..... 1 p.

Zdający

- uzależni obie współrzędne punktu C od jednej zmiennej,
np.: $C = (x, 2x + 3)$ lub $C = \left(\frac{y-3}{2}, y\right)$

albo

- zapisze równość $|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2$ i obliczy długość AB : $|AB| = 2\sqrt{10}$,

albo

- zapisze równość $|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2$ i zapisze jedną z długości $|AC|$ lub $|BC|$ w zależności od współrzędnych punktu C ,

albo

- obliczy współrzędne wektora \overline{AB} : $\overline{AB} = [6, 2]$ i zapisze, że $\overline{AB} \circ \overline{BC} = 0$,

albo

- wyznaczy współrzędne wektora \overline{BC} w zależności od współrzędnych punktu C :
 $\overline{BC} = [x-10, y-5]$ i zapisze, że $\overline{AB} \circ \overline{BC} = 0$,

albo

- wyznaczy współrzędne wektora \overline{BC} w zależności od jednej współrzędnej punktu C ,
np.: $\overline{BC} = [x-10, 2x+3-5]$,

albo

- obliczy współczynnik kierunkowy równania prostej AB :

$$a_{AB} = \frac{1}{3}$$

i na tym zakończy lub dalej popęlni błędy.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 2 p.

Zdający

- wyznaczy współczynnik kierunkowy prostej prostopadłej do prostej AB
i przechodzącej przez punkt B : $a_{BC} = -3$

albo

- zapisze równanie z dwiema niewiadomymi, np.:
$$\left(\sqrt{(x-4)^2 + (y-3)^2}\right)^2 = \left(\sqrt{(10-4)^2 + (5-3)^2}\right)^2 + \left(\sqrt{(x-10)^2 + (y-5)^2}\right)^2,$$

albo

- obliczy współrzędne wektora \overline{AB} : $\overline{AB} = [6, 2]$, wyznaczy współrzędne wektora \overline{BC}
w zależności od jednej współrzędnej punktu C , np.: $\overline{BC} = [x-10, 2x+3-5]$ i zapisze,
że $\overline{AB} \circ \overline{BC} = 0$,

albo

- zapisze równość wynikającą z warunku $\overline{AB} \circ \overline{BC} = 0$, w której niewiadomymi są dwie
współrzędne punktu C , np.: $6(x-10) + 2(y-5) = 0$

i na tym zakończy lub dalej popęlni błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 3 p.

Zdający zapisze równanie z jedną niewiadomą, która jest współrzędną punktu C , np.:

$$2x+3 = -3(x-10)+5$$

i na tym zakończy lub dalej popęlni błędy.

Rozwiązanie prawie pełne 4 p.

Zdający

- obliczy $x = \frac{32}{5}$ albo $y = \frac{79}{5}$ i na tym zakończy lub dalej popęlni błędy

albo

- obliczy obie współrzędne punktu C z błędami rachunkowymi.

Rozwiązanie pełne 5 p.

Zdający obliczy i zapisze współrzędne punktu $C = \left(\frac{32}{5}, \frac{79}{5}\right)$.

Uwagi

1. Jeżeli zdający realizuje strategię rozwiązania i popełnia jedynie błędy rachunkowe, to może otrzymać **4 punkty**, o ile popełnione błędy nie ułatwiają rozważanego zagadnienia na żadnym etapie rozwiązania.
2. Jeżeli zdający realizuje strategię rozwiązania, ale popełnia błąd, który jednak nie ułatwia rozważanego zagadnienia na żadnym etapie rozwiązania i:
 - a) jedynym błędem merytorycznym w rozwiązaniu jest błąd przy wyznaczeniu współczynnika a_{AB} , np. $\frac{x_A - x_B}{y_A - y_B}$ zamiast $\frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}$, to zdający otrzymuje co najwyżej **3 punkty**;
 - b) jedynym błędem merytorycznym w rozwiązaniu jest błąd przy wyznaczeniu równania prostej BC , to zdający otrzymuje co najwyżej **3 punkty**;
 - c) jedynym błędem merytorycznym w rozwiązaniu jest błąd, polegający na tym, że zdający zapisze błędną równość: $|BC|^2 = |AB|^2 + |AC|^2$, to zdający otrzymuje co najwyżej **3 punkty**;
 - d) w I sposobie rozwiązania przyjmie, że kąt prosty jest przy wierzchołku A , to otrzymuje co najwyżej **3 punkty**;
 - e) jedynym błędem merytorycznym w rozwiązaniu jest błąd przy podstawieniu do wzoru na odległość punktów, nawet trzykrotnie powtórzony, to zdający otrzymuje co najwyżej **3 punkty**;
 - f) jedynym błędem merytorycznym w rozwiązaniu jest zamiana miejscami współrzędnych punktu C w początkowym etapie rozwiązania, np.: $C = (2x + 3, x)$, to zdający otrzymuje co najwyżej **3 punkty**;
 - g) jedynym błędem merytorycznym w rozwiązaniu jest przyjęcie bez obliczeń błędnego współczynnika b w równaniu prostej BC (np. $\frac{5}{3}$), to zdający otrzymuje co najwyżej **3 punkty**.
3. Jeżeli zdający realizuje pełną strategię rozwiązania, ale popełnia błąd merytoryczny, który jednak nie ułatwia rozważanego zagadnienia na żadnym etapie rozwiązania i tym jedynym błędem merytorycznym jest błąd, polegający na zastosowaniu nieistniejącego wzoru „ $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$ ”, to zdający otrzymuje co najwyżej **3 punkty**.
4. Jeżeli zdający popełnia błąd, polegający na tym, że zapisuje błędną równość: $|AB|^2 = |BC|^2 + |AC|^2$, to otrzymuje co najwyżej **2 punkty**.
5. Jeżeli zdający wyznaczy równanie prostej prostopadłej do prostej o równaniu $y = 2x + 3$, to za rozwiązanie zadania otrzymuje **0 punktów**, o ile w rozwiązaniu nie występują inne zapisy wymienione w schemacie oceniania, za które należy przyznać zdającemu punkty, np.: $C = (x, 2x + 3)$.
6. Jeżeli oprócz poprawnego rozwiązania (kąt prosty przy wierzchołku B) zdający podaje inne rozwiązanie (np. kąt prosty przy wierzchołku A), którego nie odrzuca, to otrzymuje co najwyżej **4 punkty**.
7. Jeżeli zdający zapisze równanie prostej AB w postaci ogólnej (np. dokona właściwego podstawienia współrzędnych punktów do równania prostej przechodzącej przez 2 punkty) i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy, to otrzymuje **1 punkt**.

Zadanie 33. (0–2)

III. Modelowanie matematyczne.	10. Elementy statystyki opisowej. Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka. Zdający wykorzystuje własności prawdopodobieństwa i stosuje twierdzenie znane jako klasyczna definicja prawdopodobieństwa do obliczania prawdopodobieństw zdarzeń (10.d).
--------------------------------	--

Przykładowe rozwiązaniaI sposób

Zdarzeniem elementarnym jest uporządkowana para (x, y) , gdzie $x \in A$ i $y \in B$. Zatem zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych ma postać:

$$\Omega = \{(100,10), (100,11), (100,12), (100,13), (100,14), (100,15), (100,16), \\ (200,10), (200,11), (200,12), (200,13), (200,14), (200,15), (200,16), \\ (300,10), (300,11), (300,12), (300,13), (300,14), (300,15), (300,16), \\ (400,10), (400,11), (400,12), (400,13), (400,14), (400,15), (400,16), \\ (500,10), (500,11), (500,12), (500,13), (500,14), (500,15), (500,16), \\ (600,10), (600,11), (600,12), (600,13), (600,14), (600,15), (600,16), \\ (700,10), (700,11), (700,12), (700,13), (700,14), (700,15), (700,16)\}.$$

Liczba wszystkich zdarzeń elementarnych jest równa $|\Omega| = 7 \cdot 7 = 49$.

Niech A oznacza zdarzenie polegające na tym, że suma wylosowanych liczb będzie podzielna przez 3. Z cechy podzielności liczby całkowitej przez 3 wynika, że suma cyfr otrzymanej liczby $x + y$ musi być podzielna przez 3. Zbiór A ma postać:

$$A = \{(100,11), (100,14), (200,10), (200,13), (200,16), \\ (300,12), (300,15), (400,11), (400,14), (500,10), \\ (500,13), (500,16), (600,12), (600,15), (700,11), (700,14)\}.$$

Zdarzeniu A sprzyja więc 16 zdarzeń elementarnych, czyli $|A| = 16$.

Prawdopodobieństwo zdarzenia A jest równe

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{16}{49}.$$

Odpowiedź: Prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że suma wylosowanych liczb będzie liczbą podzielną przez 3, jest równe $\frac{16}{49}$.

Uwaga

Zdający może zapisać zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych jako zbiór sum możliwych do utworzenia w wyniku losowania, tzn. może zastosować zapis:

$$\Omega = \{110, 111, 112, 113, 114, 115, 116, \\ 210, 211, 212, 213, 214, 215, 216, \\ 310, 311, 312, 313, 314, 315, 316, \\ 410, 411, 412, 413, 414, 415, 416, \\ 510, 511, 512, 513, 514, 515, 516, \\ 610, 611, 612, 613, 614, 615, 616, \\ 710, 711, 712, 713, 714, 715, 716\}.$$

Wtedy zbiór

$$A = \{111, 114, 210, 213, 216, 312, 315, 411, 414, 510, 513, 516, 612, 615, 711, 714\}.$$

II sposób

Rysujemy tabelę, która przedstawia model rozważanego doświadczenia.

	100	200	300	400	500	600	700
10		×			×		
11	×			×			×
12			×			×	
13		×			×		
14	×			×			×
15			×			×	
16		×			×		

Zdarzeniom elementarnym odpowiadają komórki tej tabeli. Jest ich 49, zatem $|\Omega| = 49$.

Symbolem **×** zaznaczamy te zdarzenia elementarne, które sprzyjają zdarzeniu A , polegającemu na tym, że suma wylosowanych liczb jest podzielna przez 3.

Zdarzeniu A sprzyja więc 16 zdarzeń elementarnych, czyli $|A| = 16$.

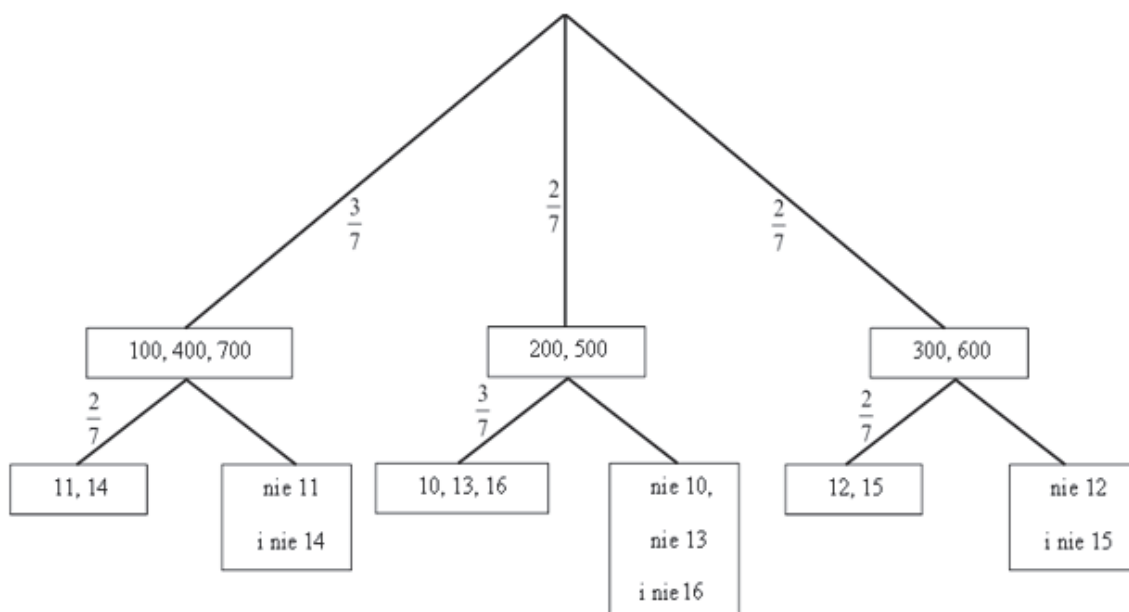
Prawdopodobieństwo zdarzenia A jest równe

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{16}{49}.$$

Odpowiedź: Prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że suma wylosowanych liczb będzie liczbą podzielną przez 3, jest równe $\frac{16}{49}$.

III sposób

Rysujemy drzewko rozważanego doświadczenia.



Prawdopodobieństwo zdarzenia A jest równe

$$P(A) = \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{7} + \frac{2}{7} \cdot \frac{3}{7} + \frac{2}{7} \cdot \frac{2}{7} = \frac{16}{49}.$$

Odpowiedź: Prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że suma wylosowanych liczb będzie liczbą podzielną przez 3, jest równe $\frac{16}{49}$.

Uwaga

Zdający może narysować drzewo probabilistyczne, w którym na każdym z etapów lub na jednym z etapów rozważa każdą możliwą do wylosowania liczbę oddzielnie. Przykład takiego drzewa znajduje się poniżej.



Prawdopodobieństwo zdarzenia A może być obliczone w następujący sposób:

$$P(A) = 5 \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{2}{7} + 2 \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{3}{7} = \frac{16}{49}.$$

Schemat punktowania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania 1 p.

Zdający

- zapisze, że $|\Omega| = 7 \cdot 7$

albo

- zapisze, że suma cyfr utworzonej sumy wylosowanych liczb musi być podzielna przez 3,

albo

- poda sposób obliczania $|A|$, np. przyjmie porządek przy wyznaczaniu sum podzielnych przez 3 oraz wyznaczy przynajmniej 4 zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu A i nie zaliczy do zbioru A niewłaściwego zdarzenia elementarnego,

albo

- przedstawi graficznie model doświadczenia z 49 zdarzeniami elementarnymi, np. narysuje tabelę z 7 kolumnami i 7 wierszami,

albo

- narysuje drzewko doświadczenia:
 1. składające się ze wszystkich 49 gałęzi
 2. składające się z mniej niż 49 gałęzi, ale wskaże na nim gałęzie odpowiadające wylosowaniu w pierwszym etapie dwóch spośród 7 liczb: 100, 200, 300, 400, 500, 600, 700 oraz wylosowaniu w drugim etapie odpowiednich liczb dających z liczbą wylosowaną w pierwszym etapie sumę podzielną przez 3

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 2 p.

Zdający

- zapisze wszystkie zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu A

albo

- zapisze, że $|\Omega| = 7 \cdot 7$ i zapisze, że suma cyfr utworzonej sumy wylosowanych liczb musi być podzielna przez 3,

albo

- zapisze, że $|\Omega| = 7 \cdot 7$ i poda sposób obliczania $|A|$, np. przyjmie porządek przy wyznaczaniu sum podzielnych przez 3, wyznaczy przynajmniej 4 zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu A , ale nie zaliczy do zbioru A niewłaściwego zdarzenia elementarnego,

albo

- przedstawi graficznie model doświadczenia z 49 zdarzeniami elementarnymi, np. narysuje tabelę z 7 kolumnami i 7 wierszami oraz zapisze, że $|\Omega| = 7 \cdot 7$,

albo

- narysuj drzewko doświadczenia:
 1. składające się ze wszystkich 49 gałęzi i zapisze prawdopodobieństwa na co najmniej jednym odcinku każdego z etapów

albo

2. składające się z mniej niż 49 gałęzi, ale wskaże na nim gałęzie odpowiadające wylosowaniu w pierwszym etapie dwóch spośród 7 liczb: 100, 200, 300, 400, 500, 600, 700 oraz wylosowaniu w drugim etapie odpowiednich liczb dających z liczbą wylosowaną w pierwszym etapie sumę podzieloną przez 3 i zapisze prawdopodobieństwa na co najmniej jednym odcinku każdego z etapów;

albo

- narysuj drzewko doświadczenia, w którym wskaże wszystkie gałęzie odpowiadające zdarzeniu A

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania..... 3 p.

Zdający

- zapisze, że $|\Omega|=7 \cdot 7$ oraz zapisze wszystkie zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu A , ale nie zaliczy do zbioru A niewłaściwego zdarzenia elementarnego

albo

- zapisze, że $|\Omega|=7 \cdot 7$ oraz zapisze, że $|A|=16$ i przedstawi sposób obliczenia tej liczby, np. zapisze, że suma cyfr utworzonej sumy wylosowanych liczb musi być podzielna przez 3 i wskaże w dowolny sposób przykładowe zdarzenie elementarne lub przyjmie porządek przy wyznaczaniu sum podzielnych przez 3 i wyznaczy przynajmniej 4 zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu A , ale nie zaliczy do zbioru A niewłaściwego zdarzenia elementarnego,

albo

- przedstawi graficznie model doświadczenia z 49 zdarzeniami elementarnymi (np. narysuj tabelę z 7 kolumnami i 7 wierszami), zapisze $|\Omega|=7 \cdot 7$, oraz zaznaczy 16 zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A i żadnych innych zdarzeń elementarnych nie zaliczy do A ,

albo

- narysuj drzewko doświadczenia, w którym wystąpią wszystkie gałęzie odpowiadające zdarzeniu A wraz z prawdopodobieństwami oraz poprawnie zastosuje regułę drzewka do obliczenia prawdopodobieństwa $P(A)$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie pełne 4 p.

Zdający obliczy prawdopodobieństwo zdarzenia A : $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{16}{49}$.

Uwagi

1. Jeżeli zdający uzyska w wyniku końcowym liczbę spoza przedziału $\langle 0,1 \rangle$, to może otrzymać co najwyżej **2 punkty**.

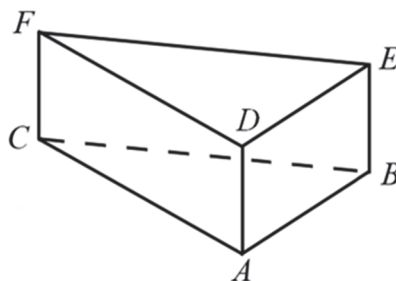
2. Jeżeli zdający w swoim rozwiązaniu wypisze 17 zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A , w tym 16 poprawnych i jedno niepoprawne oraz otrzyma prawdopodobieństwo równe $\frac{17}{49}$, to otrzymuje **2 punkty**.
3. Jeżeli zdający w swoim rozwiązaniu wypisze 15 poprawnych zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A i otrzyma prawdopodobieństwo równe $\frac{15}{49}$, to otrzymuje **2 punkty**.
4. Jeżeli zdający w swoim rozwiązaniu przyjmie błędną liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych i nie jest to efekt błędu rachunkowego, np. przyjmie $|\Omega|=7 \cdot 6$, to może otrzymać co najwyżej **2 punkty**.
5. Jeżeli zdający w swoim rozwiązaniu zapisze jedynie $|\Omega|=7 \cdot 7$, $|A|=16$ i nie przedstawi czytelnego uzasadnienia liczby zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A , i obliczy $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{16}{49}$, to otrzymuje **1 punkt**.
6. Jeżeli zdający w swoim rozwiązaniu zapisze $|\Omega|=7 \cdot 7$, $|A|=16$ oraz zapisze, że suma cyfr utworzonej sumy wylosowanych liczb musi być podzielna przez 3, ale w przedstawionym rozwiązaniu nie można zidentyfikować żadnego zdarzenia elementarnego, które zdający powinien rozważać, to otrzymuje **2 punkty**, nawet jeśli w rozwiązaniu występuje poprawny wynik końcowy.
7. Jeżeli zdający w swoim rozwiązaniu wypisze 16 zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A , w tym 15 poprawnych i jedno niewłaściwe i konsekwentnie rozwiąże zadanie do końca, to otrzymuje **2 punkty**.

Zadanie 34. (0–4)

IV. Użycie i tworzenie strategii.	9. Stereometria. Zdający wyznacza związki miarowe w wielościanach (9.b). 3. Równania i nierówności. Zdający rozwiązuje równania i nierówności kwadratowe (3.a).
-----------------------------------	--

Przykładowe rozwiązanie

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Rozważany graniastosłup ma 5 ścian, a każda z nich ma takie samo pole. Obliczamy pole podstawy, a zarazem pole jednej ściany bocznej:

$$45\sqrt{3} : 5 = 9\sqrt{3}.$$

Podstawą graniastosłupa jest trójkąt równoboczny, więc jego pole jest równe

$$P_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

Obliczamy długość krawędzi podstawy:

$$\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3},$$

$$a = 6.$$

Ściana boczna jest prostokątem o bokach długości a i h , więc pole każdej ściany bocznej jest równe

$$P_{ABED} = ah.$$

Z warunków zadania wynika, że:

$$ah = 9\sqrt{3}.$$

Znamy długość krawędzi podstawy a , zatem:

$$6h = 9\sqrt{3}.$$

Obliczamy wysokość graniastosłupa

$$h = \frac{3}{2}\sqrt{3}.$$

Objętość graniastosłupa jest równa

$$V = P_{ABC} \cdot h = 9\sqrt{3} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{81}{2}.$$

Schemat punktowania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania..... 1 p.

Zdający

- zapisze zależność między wielkościami a i h wynikającą z równości pól podstawy

i ściany bocznej graniastosłupa: $\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = ah$

albo

- obliczy pole jednej ściany graniastosłupa: $45\sqrt{3} : 5 = 9\sqrt{3}$,

albo

- zapisze równanie: $2 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + 3ah = 45\sqrt{3}$

albo

- zapisze równania: $2 \cdot \frac{1}{2}ah_p + 3ah = 45\sqrt{3}$ i $\frac{1}{2}ah_p = ah$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp..... 2 p.

Zdający

- zapisze równanie z jedną niewiadomą, pozwalające na wyznaczenie długości krawędzi podstawy lub wysokości graniastosłupa i na tym zakończy lub dalej popełni błędy

albo

- uzależni objętość bryły od jednej zmiennej

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania..... 3 p.

Zdający

- obliczy długość krawędzi podstawy i wysokość graniastosłupa: $a = 6$, $h = \frac{3}{2}\sqrt{3}$

albo

- obliczy długość krawędzi podstawy graniastosłupa: $a = 6$ i uzależni objętość bryły od jednej zmiennej a lub obliczy wysokość graniastosłupa $h = \frac{3}{2}\sqrt{3}$ i uzależni objętość bryły od jednej zmiennej h

i na tym zakończy lub dalej dopełni błędy.

Rozwiązanie pełne 4 p.

Zdający obliczy objętość graniastosłupa: $V = \frac{81}{2}$.

Uwagi

1. Jeżeli zdający realizuje strategię rozwiązania, a jedynymi błędami w przedstawionym rozwiązaniu są błędy rachunkowe, to otrzymuje **3 punkty**.
2. Jeżeli zdający popełnia błąd polegający na niepoprawnym stosowaniu wzoru na pole trójkąta równobocznego albo wzoru na pole prostokąta, to otrzymuje **2 punkty**, o ile nie popełnia innych błędów i rozwiąże zadanie do końca.
3. Jeżeli zdający popełnia błąd, polegający na niewłaściwym określeniu zależności między polem podstawy a polem ściany bocznej i w efekcie rozważa jeden z trzech przypadków: $2P_p = P_{sb}$, $P_p = 3P_{sb}$, $2P_p = 3P_{sb}$, albo błąd, polegający na przyjęciu, że graniastosłup ma trzy ściany boczne i jedną podstawę, to otrzymuje **2 punkty**, o ile nie popełnia innych błędów i rozwiąże zadanie do końca.
4. Jeżeli zdający popełnia jeden błąd, opisany w uwagach 2. lub 3., a ponadto popełnia błędy rachunkowe, ale poprawnie obliczy pole jednej ściany albo realizuje strategię rozwiązania, to otrzymuje co najwyżej **1 punkt**.
5. Jeżeli zdający popełnia inne niż wymienione w uwagach 2. lub 3. błędy, dotyczące pól ścian bryły, ale poprawnie obliczy pole jednej ściany albo realizuje strategię rozwiązania, to otrzymuje co najwyżej **1 punkt**.
6. Jeżeli zdający rozważa graniastosłup trójkątny, który nie jest prawidłowy, to może otrzymać co najwyżej **1 punkt**.