CENTRALNA
KOMISJA
EGZAMINACYJNA

Rodzaj dokumentu:	**Zasady oceniania rozwiązań zadań**
Egzamin:	**Egzamin maturalny**
Przedmiot:	**Matematyka**
Poziom:	**Poziom rozszerzony**
Formy arkusza:	EMAP-R0-100-2105, EMAP-R0-200-2105, EMAP-R0-300-2105, EMAP-R0-400-2105, EMAP-R0-600-2105, EMAP-R0-700-2105, EMAP-R0-Q00-2105
Termin egzaminu:	11 maja 2021 r.
Data publikacji dokumentu:	21 czerwca 2021 r.

Uwaga:
Gdy wymaganie egzaminacyjne dotyczy treści z III etapu edukacyjnego – dopisano „G”.

ZADANIA ZAMKNIĘTE

Zadanie 1. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2021[1]	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	Zdający: R6.2) wykorzystuje definicje i wyznacza wartości funkcji sinus, cosinus i tangens dowolnego kąta o mierze wyrażonej w stopniach lub radianach (przez sprowadzenie do przypadku kąta ostrego).

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
D

Zadanie 2. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2021	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
III. Modelowanie matematyczne.	Zdający: R6.4) posługuje się wykresami funkcji trygonometrycznych.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
C

[1] Załącznik nr 2 do rozporządzenia Ministra Edukacji Narodowej z dnia 20 marca 2020 r. w sprawie szczególnych rozwiązań w okresie czasowego ograniczenia funkcjonowania jednostek systemu oświaty w związku z zapobieganiem, przeciwdziałaniem i zwalczaniem COVID-19 (Dz.U. poz. 493, z późn. zm.).

Zadanie 3. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2021	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: R2.6) dzieli wyrażenia wymierne.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

C

Zadanie 4. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2021	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
IV. Użycie i tworzenie strategii.	Zdający: R3.8) rozwiązuje równania […] z wartością bezwzględną, o poziomie trudności nie wyższym niż $\big||x+1|-2\big|=3,\ \ |x+3|+|x-5|>12.$

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

B

ZADANIE OTWARTE (KODOWANE)

Zadanie 5. (0–2)

Wymagania egzaminacyjne 2021	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: R5.1) oblicza granice ciągów, korzystając z granic ciągów typu $1/n$, $1/n^2$ oraz z twierdzeń o działaniach na granicach ciągów.

Zasady oceniania
2 pkt – odpowiedź całkowicie poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepełna lub niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

1	2	5

ZADANIA OTWARTE (NIEKODOWANE)

1. Akceptowane są wszystkie rozwiązania merytorycznie poprawne i spełniające warunki zadania.

2. Jeżeli zdający popełni błędy rachunkowe, które na żadnym etapie rozwiązania nie upraszczają i nie zmieniają danego zagadnienia, lecz stosuje poprawną metodę i konsekwentnie do popełnionych błędów rachunkowych rozwiązuje zadanie, to może otrzymać co najwyżej $(n-1)$ punktów (gdzie n jest maksymalną możliwą do uzyskania liczbą punktów za dane zadanie).

Zadanie 6. (0–3)

Wymagania egzaminacyjne 2021	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
V. Rozumowanie i argumentacja.	Zdający: R1.2) stosuje w obliczeniach wzór na logarytm potęgi oraz wzór na zamianę podstawy logarytmu.

Zasady oceniania

Zdający otrzymuje .... 1 p.
gdy podczas przekształcenia wyrażenia $\log_3 4$ lub $\frac{4}{\log_2 18-1}$ poprawnie zastosuje wzór na zamianę podstaw logarytmu lub logarytm ilorazu/iloczynu, lub logarytm potęgi, np.:

$$\log_3 4=\frac{\log_2 4}{\log_2 3},\quad \frac{4}{\log_2 18-1}=\frac{4}{\log_2\frac{18}{2}},\quad \log_3 4=2\log_3 2,\quad \log_2 18=\log_2 2+\log_2 9$$

Zdający otrzymuje .... 2 p.
gdy:

- przekształci wyrażenie $\log_3 4$ lub $\frac{4}{\log_2 18-1}$ lub oba te wyrażenia do takiej postaci, z której poprzez jednokrotne zastosowanie wzoru na zamianę podstaw logarytmu lub logarytm ilorazu/iloczynu, lub logarytm potęgi oraz ewentualne kilkukrotne przekształcenie wyrażenia wymiernego uzyskuje się tezę

ALBO

- wyznaczy $\log_2 3$ w zależności od c: $\log_2 3 = \frac{c-1}{2}$

Zdający otrzymuje .... 3 p.
gdy, stosując poprawną metodę, przeprowadzi pełny dowód.

Uwaga:

Jeżeli zdający, przy rozpoczęciu przekształcania wyrażenia $\log_3 4$ lub $\frac{4}{\log_2 18-1}$, popełnia błąd rzeczowy (niepoprawnie zastosuje wzór na zamianę podstaw logarytmu lub logarytm ilorazu/iloczynu, lub logarytm potęgi), lecz w dalszej części rozwiązania każdorazowo stosuje te wzory poprawnie, to może otrzymać za całe rozwiązanie co najwyżej **1 punkt**.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób 1.

Przekształcamy wyrażenie $\log_3 4$, stosując wzór na zamianę podstawy logarytmu:

$$\log_3 4 = \frac{\log_2 4}{\log_2 3}$$

Aby doprowadzić do uzyskania w liczniku liczby 4, mnożymy licznik i mianownik ułamka przez 2. Otrzymujemy:

$$\frac{2 \cdot \log_2 4}{2 \cdot \log_2 3} = \frac{2 \cdot \log_2 4}{\log_2 9} = \frac{4}{\log_2 9}$$

Stosujemy wzór na różnicę logarytmów o tych samych podstawach i otrzymujemy:

$$\frac{4}{\log_2 9} = \frac{4}{\log_2 \frac{18}{2}} = \frac{4}{\log_2 18 - \log_2 2} = \frac{4}{c-1}$$

Zatem $\log_3 4 = \frac{4}{c-1}$. To należało wykazać.

Sposób 2.

Podstawiamy $\log_2 18 = c$ do wyrażenia $\frac{4}{c-1}$ i zapisujemy mianownik jako różnicę logarytmów o podstawie 2:

$$\frac{4}{c-1} = \frac{4}{\log_2 18 - \log_2 2}$$

Przekształcamy wyrażenie w mianowniku:

$$\frac{4}{\log_2 18 - \log_2 2} = \frac{4}{\log_2 9} = \frac{4}{2\log_2 3} = \frac{2}{\log_2 3}$$

Stosujemy wzór na zamianę podstawy logarytmu:

$$\frac{2}{\log_2 3} = \frac{2}{\frac{1}{\log_3 2}} = 2\log_3 2 = \log_3 4$$

Zatem $\frac{4}{c-1} = \log_3 4$. To należało wykazać.

Sposób 3.
Przekształcamy $\log_2 18 = \log_2(9 \cdot 2) = \log_2 9 + \log_2 2 = \log_2 9 + 1 = 2\log_2 3 + 1 = c$
Obliczamy $\log_2 3 = \frac{c-1}{2}$. Stąd

$$\log_3 4 = \frac{\log_2 4}{\log_2 3} = \frac{2}{\frac{c-1}{2}} = \frac{4}{c-1}$$

To należało wykazać.

Zadanie 7. (0–3)

Wymagania egzaminacyjne 2021	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: R3.7) rozwiązuje proste nierówności wymierne […].

Zasady oceniania

Zdający otrzymuje .... 1 p.
gdy:

- przekształci nierówność $\frac{2x-1}{1-x} \le \frac{2+2x}{5x}$ do postaci $\frac{12x^2-5x-2}{(1-x)\cdot 5x} \le 0$ lub $\frac{(2x-1)\cdot 5x-(2+2x)(1-x)}{(1-x)\cdot 5x} \le 0$

ALBO

- przekształci nierówność $\frac{2x-1}{1-x} \le \frac{2+2x}{5x}$, mnożąc obie strony tej nierówności przez iloczyn $(1-x)^2(5x)^2$, do postaci

  $5x \cdot (1-x)[(2x-1)\cdot 5x - (2+2x)\cdot(1-x)] \le 0$, gdzie $x \ne 0$ i $x \ne 1$

ALBO

- przyjmie, że $x \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$ i przekształci nierówność $\frac{2x-1}{1-x} \le \frac{2+2x}{5x}$ {mnożąc obie strony nierówności przez iloczyn $(1-x)5x$ } do postaci

$$(2x-1)\cdot 5x \ge (2+2x)(1-x)$$

ALBO

- przyjmie, że $x \in (0, 1)$ i przekształci nierówność $\frac{2x-1}{1-x} \leq \frac{2+2x}{5x}$ {mnożąc obie strony nierówności przez iloczyn $(1-x)5x$ } do postaci

$$(2x-1) \cdot 5x \leq (2+2x)(1-x)$$

Zdający otrzymuje .... 2p.
gdy:

- przekształci nierówność $\frac{12x^2-5x-2}{(1-x)\cdot 5x} \leq 0$ lub
  $5x \cdot (1-x)[(2x-1) \cdot 5x - (2+2x) \cdot (1-x)] \leq 0$
  do postaci iloczynowej i zapisze

$$12\left(x-\frac{2}{3}\right)\left(x+\frac{1}{4}\right)(1-x) \cdot 5x \leq 0, \text{ gdzie } x \neq 0 \text{ i } x \neq 1$$

ALBO

- rozwiąże nierówność $(2x-1)5x \geq (2+2x)(1-x)$ dla $x \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$ i zapisze:

$$x \in \left(-\infty, -\frac{1}{4}\right\rangle \cup (1, +\infty)$$

ALBO

- rozwiąże nierówność $(2x-1)5x \leq (2+2x)(1-x)$ dla $x \in (0, 1)$ i zapisze:

$$x \in \left(0, \frac{2}{3}\right\rangle$$

ALBO

- spełni wymagania za 1 punkt oraz obliczy wszystkie pierwiastki wielomianów $12x^2 - 5x - 2$ i $5x(1-x)$ {albo wielomianów $5x(2x-1)$ i $(2+2x)(1-x)$ }

Zdający otrzymuje .... 3p.
gdy zastosuje poprawną metodę rozwiązania nierówności i otrzyma poprawny wynik:

$$x \in \left(-\infty, -\frac{1}{4}\right\rangle \cup \left(0, \frac{2}{3}\right\rangle \cup (1, +\infty).$$

Uwagi:

1. Jeśli zdający mnoży obie strony nierówności przez iloczyn mianowników bez rozpatrzenia znaków tego iloczynu, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.
2. Jeśli zdający nie wyłączy ze zbioru rozwiązań nierówności liczb $x = 0$ i $x = 1$, to otrzymuje za całe rozwiązanie co najwyżej **2 punkty**.

Przykładowe pełne rozwiązania

<u>Sposób 1.</u>

Zakładamy, że $x \neq 0$ i $x \neq 1$. Przekształcamy równoważnie podaną nierówność:

$$\frac{2x-1}{1-x} - \frac{2+2x}{5x} \leq 0$$

$$\frac{10x^2-5x-2-2x+2x+2x^2}{5x(1-x)} \le 0$$

$$\frac{12x^2-5x-2}{5x(1-x)} \le 0$$

Stąd dostajemy

$$12\left(x-\frac{2}{3}\right)\left(x+\frac{1}{4}\right)(1-x)\cdot 5x \le 0 \quad \text{i} \quad x \ne 0 \quad \text{i} \quad x \ne 1.$$

Zatem $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{4}\right\rangle \cup \left(0, \frac{2}{3}\right\rangle \cup (1, +\infty)$.

<u>Sposób 2.</u>

Zakładamy, że $x \ne 0$ i $x \ne 1$. Przekształcamy równoważnie podaną nierówność:

$$\frac{2x-1}{1-x} - \frac{2+2x}{5x} \le 0 /\cdot (1-x)^2(5x)^2$$

$$5x(1-x)[10x^2-5x-(2+2x-2x-2x^2)] \le 0,$$

$$5x(1-x)[10x^2-5x-2+2x^2] \le 0,$$

$$12(1-x)\left(x+\frac{1}{4}\right)\left(x-\frac{2}{3}\right)5x \le 0 \quad \text{i} \quad x \ne 0 \quad \text{i} \quad x \ne 1.$$

Zatem $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{4}\right\rangle \cup \left(0, \frac{2}{3}\right\rangle \cup (1, +\infty)$.

<u>Sposób 3.</u>

1. Rozwiązujemy nierówność $\frac{2x-1}{1-x} \le \frac{2+2x}{5x}$ w zbiorze $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$.

Przekształcamy równoważnie podaną nierówność:

$$\frac{2x-1}{1-x} - \frac{2+2x}{5x} \le 0 \quad /\cdot (1-x)5x$$

$$(2x-1)5x \ge (2+2x)(1-x)$$

$$12x^2-5x-2 \ge 0$$

Otrzymujemy $x_1 = -\frac{1}{4}$, $x_2 = \frac{2}{3}$ oraz $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{4}\right\rangle \cup (1, +\infty)$.

2. Rozwiązujemy nierówność $\frac{2x-1}{1-x} \le \frac{2+2x}{5x}$ w zbiorze $(0,1)$.

Przekształcamy równoważnie podaną nierówność:

$$\frac{2x-1}{1-x} - \frac{2+2x}{5x} \le 0 \quad /\cdot (1-x)5x$$

$$(2x-1)5x \le (2+2x)(1-x)$$

$$12x^2-5x-2 \le 0$$

Otrzymujemy $x_1 = -\frac{1}{4}$, $x_2 = \frac{2}{3}$ oraz $x \in \left(0, \frac{2}{3}\right\rangle$.

Zatem zbiorem rozwiązań nierówności $\frac{2x-1}{1-x} \leq \frac{2+2x}{5x}$ jest $\left(-\infty, -\frac{1}{4}\right\rangle \cup \left(0, \frac{2}{3}\right\rangle \cup (1, +\infty)$.

Zadanie 8. (0–3)

Wymagania egzaminacyjne 2021	
Wymaganie ogólne	**Wymagania szczegółowe**
V. Rozumowanie i argumentacja	Zdający: G10.13) stosuje cechy przystawania trójkątów […]. R7.3) rozpoznaje figury podobne […].

Zasady oceniania

Zdający otrzymuje .... 1 p.
gdy:

- zapisze, że trójkąty ABE i BCD (lub EBC i DCA) są przystające

ALBO

- zapisze, że trójkąty DBP i DCB (lub EBA) są podobne lub zapisze odpowiednie proporcje wynikające z tego podobieństwa

ALBO

- wyznaczy długość odcinka CD w zależności od $|DB|$: $|CD| = |DB| \cdot \sqrt{7}$

ALBO

- zastosuje twierdzenie o stosunku pól trójkątów o tych samych wysokościach (np. w sposobie 8. zapisze, że $\frac{P_{FDP}}{P_{DGP}} = \frac{|FD|}{|DG|}$)

ALBO

- umieści trójkąt ABC w układzie współrzędnych i wyznaczy współrzędne punktów D i E w zależności od długości boku trójkąta ABC

ALBO

- narysuje odcinek DF równoległy do AC (sposób 5.) i zapisze, że trójkąty DGP i CEP (lub trójkąty DBG i ABE) są podobne

ALBO

- narysuje odcinek GF równoległy do AC (sposób 7.) i zapisze, że trójkąty GDP i ADC (lub trójkąty GBP i ABE) są podobne

ALBO

- narysuje odcinek EF równoległy do AB (sposób 4.) i zapisze, że trójkąty ADC i EGC (lub DBC i GFC, lub trójkąty DBP i GEP) są podobne

ALBO

- zapisze, że trójkąty DBP i DAF są podobne (sposób 10.) lub zapisze odpowiednie proporcje wynikające z tego podobieństwa

Zdający otrzymuje .... 2 p.
gdy:

- zapisze, że trójkąty DBP i DCB (lub EBA) są podobne i obliczy skalę ich podobieństwa: $s = \frac{1}{\sqrt{7}}$

ALBO

- zapisze układ nie więcej niż czterech niezależnych równań liniowych prowadzących do uzasadnienia tezy

ALBO

- zapisze równanie z dwiema niewiadomymi m i a, np. $\left(\frac{1}{3}a\right)^2 = m^2 + (3m)^2 - 2 \cdot m \cdot 3m \cdot \frac{1}{2}$ (sposób 3.) oraz zapisze, że pole trójkąta DBP jest równe $P_{DBP} = \frac{1}{2} \cdot |DP| \cdot |BP| \cdot \sin 60°$

ALBO

- wyznaczy stosunek długości odcinka DP do długości odcinka CD: $\frac{|DP|}{|CD|} = \frac{1}{7}$ (sposoby 4., 5., 6. i 7.)

ALBO

- zapisze w zależności od $x = P_{DGP}$ pola trójkątów: FGP, PHK, MPL, DBP i co najmniej jednego z trójkątów AFP (lub APM), PKC (lub PCL): $P_{FGP} = 3x$, $P_{PHK} = 12x$, $P_{MPL} = 48x$, $P_{DBP} = 7x$, $P_{PFP} = 6x$, $P_{PKC} = 24x$ (sposób 8.)

ALBO

- obliczy drugą współrzędną punktu P w zależności od przyjętej zmiennej: $y_P = \frac{\sqrt{3}}{14}a$ (sposób 9.)

ALBO

- zapisze $P_{DBP} = \frac{1}{3}P_{PFB}$ i $P_{ABC} = P_{PRS} + P_{ABS} + P_{BCP} + P_{CAR}$ (sposób 10.)

Zdający otrzymuje .... 3 p.
gdy przeprowadzi pełne rozumowanie.

Przykładowe pełne rozwiązania

<u>Sposób 1.</u>
Trójkąty ABE i BCD są przystające, gdyż $|AB| = |BC|$, $|\sphericalangle BAE| = |\sphericalangle CBD| = 60°$ oraz $|AE| = |BD|$. Zatem $|\sphericalangle ABE| = |\sphericalangle BCD|$ oraz $|\sphericalangle AEB| = |\sphericalangle BDC|$. Stąd wynika (cecha KKK), że trójkąt DBP jest podobny do trójkąta DCB, a skala tego podobieństwa jest równa

$$s = \frac{|BD|}{|CD|}.$$

Niech $|DB| = a$. Wtedy $|BC| = 3a$. Z twierdzenia cosinusów dla trójkąta DBC otrzymujemy

$$|CD| = \sqrt{|BD|^2 + |BC|^2 - 2 \cdot |BD| \cdot |BC| \cdot \cos 60°} = \sqrt{a^2 + (3a)^2 - 2 \cdot a \cdot 3a \cdot \frac{1}{2}} = \sqrt{7}a$$

Zatem $s = \frac{a}{a\sqrt{7}} = \frac{1}{\sqrt{7}}$.

Pole trójkąta DBC jest trzecią częścią pola trójkąta ABC, gdyż oba te trójkąty mają wspólną wysokość opuszczoną z wierzchołka C oraz $|BD| = \frac{1}{3}|AB|$.

Ponieważ stosunek pól figur podobnych jest równy kwadratowi skali ich podobieństwa, więc

$$P_{\Delta DBP} = s^2 \cdot P_{\Delta DBC} = \left(\frac{1}{\sqrt{7}}\right)^2 \cdot \frac{1}{3} \cdot P_{\Delta ABC} = \frac{1}{21} \cdot P_{\Delta ABC}$$

To należało wykazać.

Uwagi:

1. Po wyznaczeniu długości $|CD| = |BE|$ można wyznaczyć sinus kąta DBE, korzystając z twierdzenia sinusów. Wtedy otrzymujemy

$$\frac{|BE|}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{a}{\sin|\sphericalangle DBE|}$$

skąd $\sin|\sphericalangle DBE| = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}$, więc

$$P_{\Delta DBP} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{7}} \cdot 3a\right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{28} = \frac{(3a)^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{1}{21} = \frac{1}{21} \cdot P_{\Delta ABC}$$

2. Długość odcinka CD możemy też obliczyć w inny sposób. Poniżej przedstawiamy dwa z tych sposobów:

a) Niech M oznacza spodek wysokości trójkąta ABC opuszczonej z wierzchołka C. Wtedy

$$|CM| = \frac{3a\sqrt{3}}{2} \quad \text{oraz} \quad |MD| = |MB| - |DB| = \frac{1}{2} \cdot 3a - a = \frac{1}{2}a$$

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta MDC otrzymujemy

$$|CD| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}a\right)^2 + \left(\frac{3a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{28}{4}a^2} = a\sqrt{7}$$

b) Z twierdzenia Stewarta otrzymujemy

$$(3a)^2 \cdot 2a + (3a)^2 \cdot a = 3a \cdot (|CD|^2 + 2a \cdot a)$$

$$3a \cdot 2a + 3a \cdot a = |CD|^2 + 2a^2$$

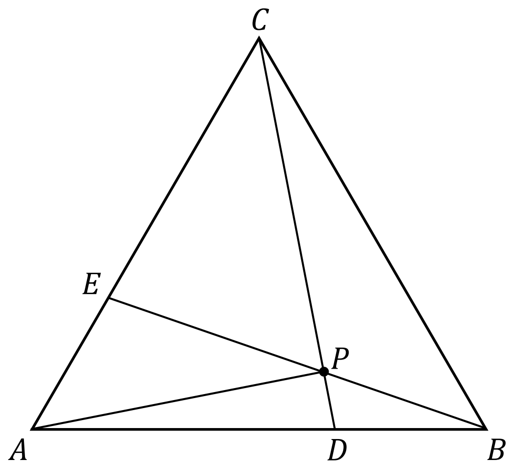
$$|CD|^2 = 7a^2$$

$$|CD| = a\sqrt{7}$$

<u>Sposób 2.</u>

Przyjmijmy, że $P_{\Delta ABC} = S$, $P_{\Delta DBP} = Q$, $P_{\Delta APE} = Y$, $P_{\Delta BCP} = X$.

W dalszym ciągu rozumowania będziemy wielokrotnie korzystać z faktu, że stosunek pól trójkątów o wspólnej wysokości jest równy stosunkowi długości podstaw, na które ta wysokość jest opuszczona.



Zatem $P_{ABE} = \frac{1}{3}S$, $P_{CBE} = \frac{2}{3}S$, $P_{DBC} = \frac{1}{3}S$, $P_{ADC} = \frac{2}{3}S$. Ponadto

$$\frac{P_{APE}}{P_{CPE}} = \frac{1}{2} \quad \text{oraz} \quad \frac{P_{DBP}}{P_{ADP}} = \frac{1}{2}$$

Otrzymaliśmy więc układ równań

$$\begin{cases} Q + X = \frac{1}{3}S \\ 2Y + X = \frac{2}{3}S \\ Y + 3Q = \frac{1}{3}S \end{cases}$$

Wyznaczając wielkość X z pierwszego równania i wielkość Y z trzeciego oraz wstawiając wyznaczone wielkości do równania drugiego, otrzymujemy:

$$2\left(\frac{1}{3}S - 3Q\right) + \left(\frac{1}{3}S - Q\right) = \frac{2}{3}S$$

$$\frac{1}{3}S = 7Q$$

$$Q = \frac{1}{21}S$$

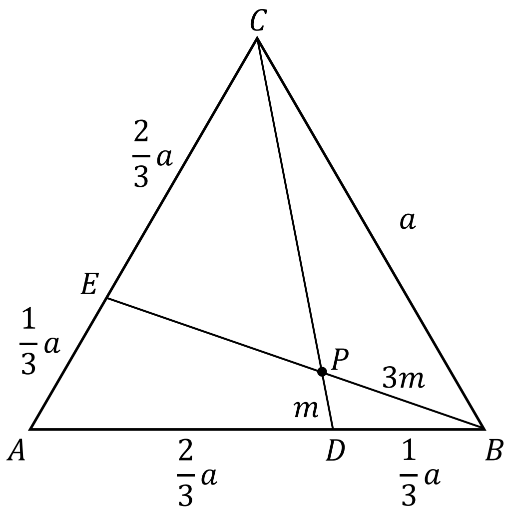
To należało wykazać.

Sposób 3.

Trójkąty ABE i BCD są przystające, gdyż $|AB| = |BC|$, $|\measuredangle BAE| = |\measuredangle CBD| = 60^\circ$ oraz $|AE| = |BD|$. Zatem $|\measuredangle ABE| = |\measuredangle BCD|$ oraz $|\measuredangle AEB| = |\measuredangle BDC|$. Stąd wynika (cecha KKK), że trójkąt DBP jest podobny do trójkąta DCB.

Zatem $\frac{|AE|}{|AB|} = \frac{|DP|}{|BP|} = \frac{1}{3}$, więc $|BP| = 3|DP|$ oraz $|\measuredangle BPD| = 60^\circ$. Oznaczmy $|DP| = m$.

Wtedy $|BP| = 3m$.



Z twierdzenia cosinusów dla trójkąta DBP otrzymujemy

$$|BD|^2 = |DP|^2 + |BP|^2 - 2 \cdot |DP| \cdot |BP| \cdot \cos 60^\circ$$

czyli

$$\left(\frac{1}{3}a\right)^2 = m^2 + (3m)^2 - 2 \cdot m \cdot 3m \cdot \frac{1}{2}$$

Stąd

$$\frac{1}{9}a^2 = 7m^2$$

$$m^2 = \frac{1}{63}a^2$$

Pole trójkąta DBP jest równe

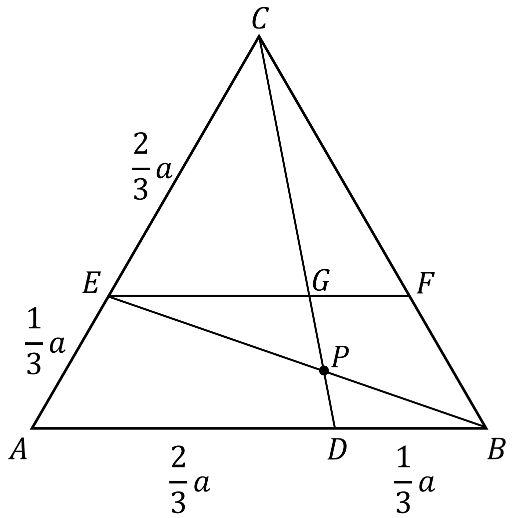
$$P_{DBP} = \frac{1}{2} \cdot |DP| \cdot |BP| \cdot \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \cdot m \cdot 3m \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{4} \cdot m^2\sqrt{3} =$$

$$= \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{63}a^2\sqrt{3} = \frac{1}{21} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{21} \cdot P_{ABC}$$

To należało wykazać.

Sposób 4.

Oznaczmy przez a długość boku trójkąta ABC. Prowadzimy odcinek EF równoległy do boku AB trójkąta ABC.



Trójkąty ADC i EGC są podobne (cecha KKK), więc

$$\frac{|EG|}{|CE|} = \frac{|AD|}{|AC|} = \frac{2}{3} \text{ oraz } \frac{|CG|}{|CD|} = \frac{|CE|}{|AC|} = \frac{2}{3}$$

Stąd

$$|EG| = \frac{2}{3}|CE| = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}a = \frac{4}{9}a \text{ oraz } |CG| = \frac{2}{3}|CD|$$

Z drugiej równości wynika, że $|GD| = \frac{1}{3}|CD|$.

Trójkąty DBP i GEP są podobne (cecha KKK), więc

$$\frac{|DP|}{|GP|} = \frac{|DB|}{|EG|} = \frac{\frac{1}{3}a}{\frac{4}{9}a} = \frac{3}{4}$$

Zatem

$$|DP| = \frac{3}{7}|DG| = \frac{3}{7} \cdot \frac{1}{3}|CD| = \frac{1}{7}|CD|$$

Trójkąty DBP i DBC mają wspólną wysokość opuszczoną z wierzchołka B, więc

$$\frac{P_{DBP}}{P_{DBC}} = \frac{|DP|}{|DC|} = \frac{1}{7}, \quad \text{czyli} \quad P_{DBP} = \frac{1}{7}P_{DBC}.$$

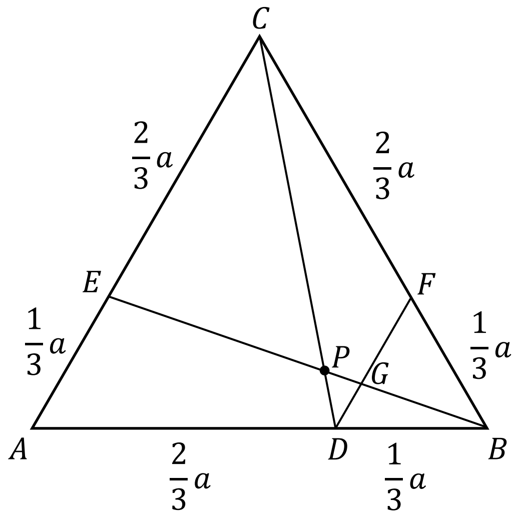
Ponadto $P_{DBC} = \frac{1}{3}P_{ABC}$, gdyż trójkąty DBC i ABC mają wspólną wysokość opuszczoną z wierzchołka C i $|DB| = \frac{1}{3}|AB|$, więc

$$P_{DBP} = \frac{1}{7}P_{DBC} = \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{3}P_{ABC} = \frac{1}{21}P_{ABC}.$$

To należało wykazać.

Sposób 5.

Oznaczmy przez a długość boku trójkąta ABC. Prowadzimy odcinek DF równoległy do boku AC trójkąta ABC. Niech G oznacza punkt przecięcia odcinków BE i DF.



Trójkąt DBF jest równoboczny, a jego bok ma długość $\frac{1}{3}a$.

Trójkąty DBG i ABE są podobne (cecha KKK), więc

$$\frac{|DG|}{|DB|} = \frac{|AE|}{|AB|} = \frac{1}{3}$$

Stąd

$$|DG| = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}a = \frac{1}{9}a$$

Trójkąty DGP i CEP są podobne (cecha KKK), więc

$$\frac{|DP|}{|CP|} = \frac{|DG|}{|CE|} = \frac{\frac{1}{9}a}{\frac{2}{3}a} = \frac{1}{6}$$

Zatem $|DP| = \frac{1}{7}|CD|$.

Trójkąty DBP i DBC mają wspólną wysokość opuszczoną z wierzchołka B, więc

$$\frac{P_{DBP}}{P_{DBC}} = \frac{|DP|}{|DC|} = \frac{1}{7}\ , \quad \text{czyli} \quad P_{DBP} = \frac{1}{7}P_{DBC}\ .$$

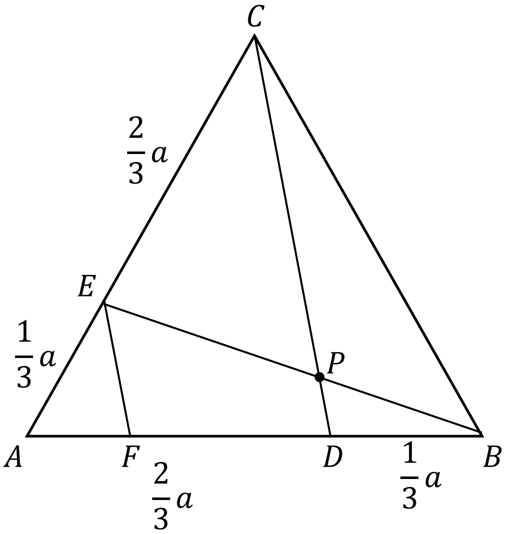
Ponadto $P_{DBC} = \frac{1}{3}P_{ABC}$, gdyż trójkąty DBC i ABC mają wspólną wysokość opuszczoną z wierzchołka C i $|DB| = \frac{1}{3}|AB|$, więc

$$P_{DBP} = \frac{1}{7}P_{DBC} = \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{3}P_{ABC} = \frac{1}{21}P_{ABC}\ .$$

To należało wykazać.

<u>Sposób 6.</u>

Oznaczmy przez a długość boku trójkąta ABC. Wtedy $|AD| = |CE| = \frac{2}{3}a$ oraz $|AE| = |DB| = \frac{1}{3}a$. Prowadzimy odcinek EF równoległy do boku CD trójkąta ACD.



Trójkąty AFE i ADC są podobne (cecha KKK), więc

$$\frac{|EF|}{|CD|} = \frac{|AE|}{|AC|} = \frac{1}{3} \quad \text{oraz} \quad \frac{|AF|}{|AE|} = \frac{|AD|}{|AC|} = \frac{2}{3}$$

Stąd

$$|EF| = \frac{1}{3}|CD| \quad \text{oraz} \quad |AF| = \frac{2}{3}|AE| = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}a = \frac{2}{9}a$$

Zatem $|FB| = |AB| - |AF| = a - \frac{2}{9}a = \frac{7}{9}a$.

Trójkąty FBE i DBP są podobne (cecha KKK), więc

$$\frac{|PD|}{|EF|} = \frac{|DB|}{|FB|} = \frac{\frac{1}{3}a}{\frac{7}{9}a} = \frac{3}{7}$$

Stąd

$$|DP| = \frac{3}{7}|EF| = \frac{3}{7} \cdot \frac{1}{3}|CD| = \frac{1}{7}|CD|$$

Trójkąty DBP i DBC mają wspólną wysokość opuszczoną z wierzchołka B, więc

$$\frac{P_{DBP}}{P_{DBC}} = \frac{|DP|}{|DC|} = \frac{1}{7}, \quad \text{czyli} \quad P_{DBP} = \frac{1}{7}P_{DBC}.$$

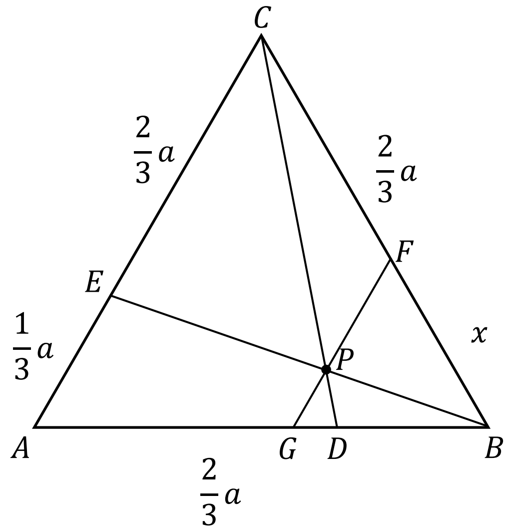
Ponadto $P_{DBC} = \frac{1}{3}P_{ABC}$, gdyż trójkąty DBC i ABC mają wspólną wysokość opuszczoną z wierzchołka C i $|DB| = \frac{1}{3}|AB|$, więc

$$P_{DBP} = \frac{1}{7}P_{DBC} = \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{3}P_{ABC} = \frac{1}{21}P_{ABC}.$$

To należało wykazać.

Sposób 7.

Przez punkt P prowadzimy odcinek GF równoległy do boku AC trójkąta ABC. Trójkąt GFB jest równoboczny. Oznaczmy długość boku trójkąta ABC przez a i odcinka BF przez x.



Trójkąty GBP i ABE są podobne (cecha KKK), więc

$$\frac{|GP|}{|GB|}=\frac{|AE|}{|AB|}=\frac{\frac{1}{3}a}{a}=\frac{1}{3}$$

Stąd $|GP|=\frac{1}{3}x$.

Trójkąty GDP i ADC są podobne (cecha KKK), więc

$$\frac{|GP|}{|GD|}=\frac{|AC|}{|AD|}=\frac{a}{\frac{2}{3}a}=\frac{3}{2} \quad \text{oraz} \quad \frac{|PD|}{|CD|}=\frac{|GP|}{|AC|}$$

Stąd $|GD|=\frac{2}{3}|GP|$, więc

$$|DB|=|GB|-|GD|=x-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}x=\frac{7}{9}x$$

Zatem $\frac{1}{3}a=\frac{7}{9}x$, czyli $x=\frac{3}{7}a$.

Korzystając z proporcji $\frac{|PD|}{|CD|}=\frac{|GP|}{|AC|}$, otrzymujemy

$$\frac{|PD|}{|CD|}=\frac{\frac{1}{3}x}{a}=\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{7}a}{a}=\frac{1}{7}$$

Trójkąty DBP i DBC mają wspólną wysokość opuszczoną z wierzchołka B, więc

$$\frac{P_{DBP}}{P_{DBC}}=\frac{|DP|}{|DC|}=\frac{1}{7}\ , \quad \text{czyli} \quad P_{DBP}=\frac{1}{7}P_{DBC}\ .$$

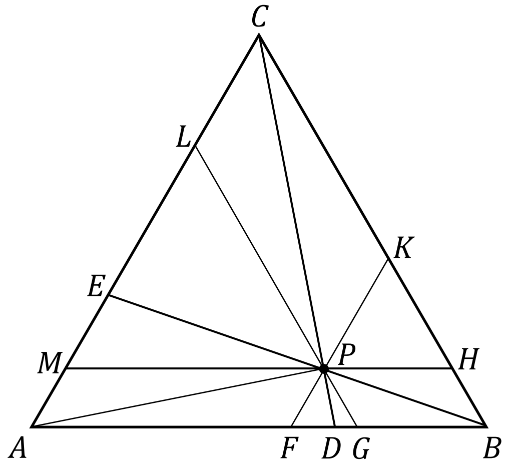
Ponadto $P_{DBC} = \frac{1}{3} P_{ABC}$, gdyż trójkąty DBC i ABC mają wspólną wysokość opuszczoną z wierzchołka C i $|DB| = \frac{1}{3}|AB|$, więc

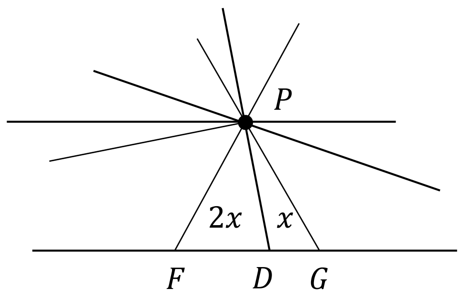
$$P_{DBP} = \frac{1}{7} P_{DBC} = \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{3} P_{ABC} = \frac{1}{21} P_{ABC} .$$

To należało wykazać.

Sposób 8.

Przez punkt P prowadzimy odcinki MH, GL i FK równoległe do boków – odpowiednio – AB, BC i AC trójkąta ABC. Podzieliliśmy w ten sposób trójkąt ABC na trzy trójkąty równoboczne FGP, PHK, MPL i trzy równoległoboki $BGPH$, $PKCL$ i $AFPM$. Oznaczmy pole trójkąta DGP przez x.





Trójkąty FBP i ABE są podobne (cecha KKK). Zatem $\frac{|FP|}{|FB|} = \frac{|AE|}{|AB|} = \frac{1}{3}$, więc $|FP| = \frac{1}{3}|FB| = \frac{1}{3}|FK|$, gdyż trójkąt FBK jest równoboczny. Stąd $\frac{|FP|}{|PK|} = \frac{1}{2}$.

Tak samo wnioskujemy, że $\frac{|PH|}{|MP|} = \frac{1}{2}$.

Trójkąty FDP i ADC są podobne (cecha KKK), więc $\frac{|FP|}{|FD|} = \frac{|AC|}{|AD|} = \frac{3}{2}$, a stąd wynika, że $\frac{|DG|}{|FD|} = \frac{1}{2}$.

Trójkąty FDP i DGP mają wspólną wysokość opuszczoną z wierzchołka P, więc $\frac{P_{DGP}}{P_{FDP}} = \frac{|DG|}{|FD|} = \frac{1}{2}$, więc $P_{FDP} = 2x$, skąd $P_{FGP} = 3x$.

Trójkąty równoboczne są podobne, więc stosunek ich pól jest równy kwadratowi skali ich podobieństwa. Zatem

$$\frac{P_{FGP}}{P_{PHK}} = \left(\frac{|FP|}{|PK|}\right)^2 = \frac{1}{4} \text{ , więc } P_{PHK} = 4P_{FGP} = 4 \cdot 3x = 12x$$

oraz

$$\frac{P_{PHK}}{P_{MPL}} = \left(\frac{|PH|}{|MP|}\right)^2 = \frac{1}{4} \text{ , więc } P_{MPL} = 4P_{PHK} = 4 \cdot 12x = 48x$$

Trójkąty FGP i GBP mają wspólną wysokość opuszczoną z wierzchołka P, więc $\frac{P_{FGP}}{P_{GBP}} = \frac{|FG|}{|GB|}$. Trójkąty PHK i BHP również mają wspólną wysokość opuszczoną z wierzchołka P, więc $\frac{P_{PHK}}{P_{BHP}} = \frac{|KH|}{|BH|}$.

Zatem, wobec $|FG| = |PG| = |BH|$ oraz $|GB| = |PH| = |KH|$, otrzymujemy

$$\frac{P_{FGP}}{P_{GBP}} \cdot \frac{P_{PHK}}{P_{BHP}} = \frac{|FG|}{|GB|} \cdot \frac{|KH|}{|BH|} = 1$$

Ponieważ $P_{GBP} = P_{BHP}$, więc $P_{GBP} = P_{BHP} = \sqrt{P_{FGP} \cdot P_{PHK}}$.

Analogicznie otrzymujemy $P_{KPC} = P_{PCL} = \sqrt{P_{PHK} \cdot P_{MPL}}$ oraz $P_{AFP} = P_{APM} = \sqrt{P_{FGP} \cdot P_{MPL}}$.

Zatem

$P_{GBP} = P_{BHP} = \sqrt{3x \cdot 12x} = 6x$,

$P_{KPC} = P_{PCL} = \sqrt{12x \cdot 48x} = 24x$,

$P_{AFP} = P_{APM} = \sqrt{3x \cdot 48x} = 12x$.

Pole trójkąta ABC jest więc równe

$$\begin{aligned} P_{ABC} &= P_{FGP} + P_{PKH} + P_{MPL} + 2P_{GBP} + 2P_{KPC} + 2P_{AFP} = \\ &= 3x + 12x + 48x + 2 \cdot 6x + 2 \cdot 24x + 2 \cdot 12x = 147x \end{aligned}$$

Natomiast pole trójkąta DBP jest równe

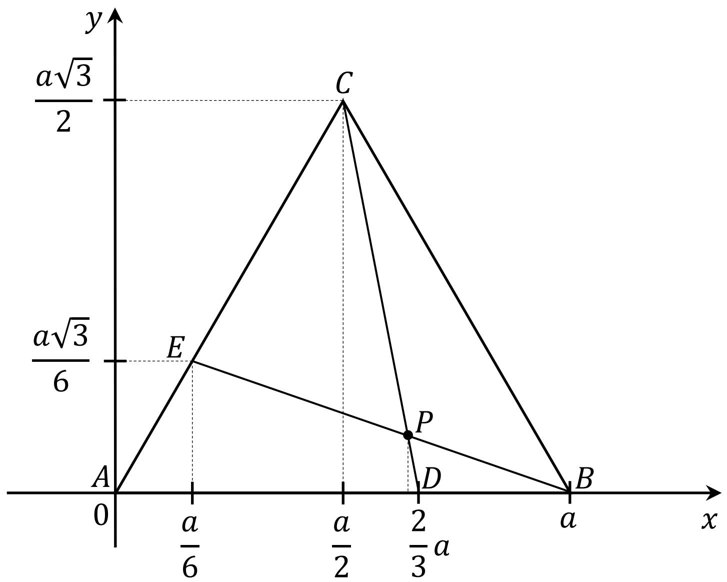
$$P_{DBP} = P_{DGP} + P_{GBP} = x + 6x = 7x$$

Wobec tego $P_{DBP} = 7x = \frac{1}{21} \cdot 147x = \frac{1}{21} P_{ABC}$.

To należało wykazać.

Sposób 9.

Oznaczmy długość boku trójkąta ABC przez a. Umieszczamy trójkąt ABC w układzie współrzędnych tak, aby $A = (0, 0)$ i $B = (a, 0)$, a wierzchołek C leżał w pierwszej ćwiartce układu współrzędnych.



Wtedy $C=\left(\frac{a}{2},\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$, $D=\left(\frac{2}{3}a,0\right)$, $E=\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{a}{2},\frac{1}{3}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)=\left(\frac{a}{6},\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)$.

Współczynniki kierunkowe prostych CD i BE są równe

$a_{CD}=\frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}-0}{\frac{a}{2}-\frac{2}{3}a}=-3\sqrt{3}$ oraz $a_{BE}=\frac{\frac{a\sqrt{3}}{6}-0}{\frac{a}{6}-a}=-\frac{\sqrt{3}}{5}$.

Zatem prosta CD ma równanie $y=-3\sqrt{3}\left(x-\frac{2}{3}a\right)$, natomiast prosta BE ma równanie $y=-\frac{\sqrt{3}}{5}(x-a)$.

Obliczamy współrzędne punktu P, rozwiązując układ równań $\begin{cases} y=-3\sqrt{3}\left(x-\frac{2}{3}a\right) \\ y=-\frac{\sqrt{3}}{5}(x-a) \end{cases}$. Stąd otrzymujemy $x=\frac{9}{14}a$ oraz $y=-\frac{\sqrt{3}}{5}\left(\frac{9}{14}a-a\right)=\frac{\sqrt{3}}{14}a$, więc $P=\left(\frac{9}{14}a,\frac{\sqrt{3}}{14}a\right)$. Zatem

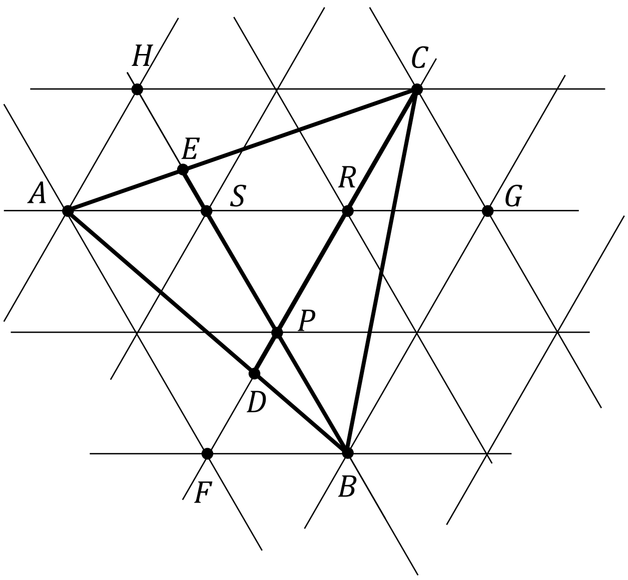
$$\frac{P_{DBP}}{P_{ABC}}=\frac{\frac{1}{2}\cdot|DB|\cdot\frac{\sqrt{3}}{14}a}{\frac{a^2\sqrt{3}}{4}}=\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}a\cdot\frac{\sqrt{3}}{14}a}{\frac{a^2\sqrt{3}}{4}}=\frac{1}{21}$$

czyli $P_{DBP}=\frac{1}{21}P_{ABC}$.

To należało wykazać.

Sposób 10.

Trójkąt ABC umieszczamy na sieci złożonej z przystających trójkątów równobocznych (jak na rysunku). Punkty F, G, H, R, S to wybrane węzły sieci.



Niech jednostką pola będzie pole jednego elementarnego trójkąta sieci.

Trójkąt DBP jest podobny do trójkąta DAF (cecha KKK), więc $\frac{|DP|}{|FD|} = \frac{|DB|}{|AD|} = \frac{1}{2}$. Stąd $|FD| = 2|DP|$, więc $|DP| = \frac{1}{3}|PF|$. Trójkąty DBP oraz PFB mają wspólną wysokość opuszczoną z wierzchołka B, więc $\frac{P_{DBP}}{P_{PFB}} = \frac{|DP|}{|PF|} = \frac{1}{3}$, czyli $P_{DBP} = \frac{1}{3}P_{PFB} = \frac{1}{3}$.

Ponieważ

$$P_{ABC} = P_{PRS} + P_{ABS} + P_{BCP} + P_{CAR} = P_{PRS} + \frac{1}{2}P_{AFBS} + \frac{1}{2}P_{BGCP} + \frac{1}{2}P_{ARCH}$$

więc

$$P_{ABC} = 1 + \frac{1}{2}\cdot 4 + \frac{1}{2}\cdot 4 + \frac{1}{2}\cdot 4 = 7$$

Zatem $P_{DBP} = \frac{1}{21}P_{ABC}$. To należało wykazać.

Zadanie 9. (0–4)

Wymagania egzaminacyjne 2021	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
III. Modelowanie matematyczne.	Zdający: R10.2) oblicza prawdopodobieństwo warunkowe.

Zasady oceniania

Zdający otrzymuje .... 1 p.
gdy:

- zapisze liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych: $|\Omega| = 9000$

ALBO

- zastosuje poprawną metodę zliczania elementów zbioru B, zawierającego wszystkie liczby naturalne czterocyfrowe podzielne przez 18 (np. poprzez wykorzystanie własności ciągu arytmetycznego, stosowanie cech podzielności liczb całkowitych)

ALBO

- zastosuje poprawną metodę zliczania elementów zbioru $A \cap B$ (np. poprzez wykorzystanie własności ciągu arytmetycznego, stosowanie cech podzielności liczb całkowitych)

ALBO

- zapisze, że jeżeli A jest zdarzeniem polegającym na wylosowaniu liczby podzielnej przez 15, to iloczyn zdarzeń $A \cap B$ oznacza wylosowanie liczby podzielnej przez 90

Zdający otrzymuje .... 2 p.
gdy:

- obliczy liczbę zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu B: $|B| = 500$

ALBO

- obliczy liczbę zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu $A \cap B$: $|A \cap B| = 100$

Zdający otrzymuje .... 3 p.
gdy:

- obliczy liczbę zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu B oraz obliczy liczbę zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu $A \cap B$: $|B| = 500$, $|A \cap B| = 100$

Zdający otrzymuje .... 4 p.
gdy zastosuje poprawną metodę i obliczy szukane prawdopodobieństwo warunkowe: $P(A|B) = \frac{18}{90} = \frac{1}{5}$.

Uwagi:

1. Jeśli zdający rozwiąże zadanie, rozpatrując wszystkie liczby naturalne spełniające warunek $1 \leq x \leq 9999$, to może otrzymać co najwyżej **2 punkty** za całe rozwiązanie.
2. Jeśli zdający, wyznaczając, ile jest liczb podzielnych przez 18 lub 15, rozważa, że są one mniejsze niż 9000, to może otrzymać co najwyżej **2 punkty** za całe rozwiązanie.
3. Ignorujemy zapis $P(A|B) = \frac{|A \cup B|}{|B|}$, jeżeli z rozwiązania zdającego jednoznacznie wynika, że zliczał wszystkie zdarzenia elementarne sprzyjające iloczynowi tych zdarzeń.
4. Jeżeli w sposobie zliczania elementów zbioru $|B|$ (lub $|A \cap B|$) opartym na kolejnych wyrazach ciągu arytmetycznego zdający poprawnie ustala pierwszy i ostatni wyraz ciągu oraz różnicę tego ciągu, to przyjmujemy ten sposób zliczania jest poprawny. Jeżeli natomiast błędnie ustali pierwszy lub ostatni wyraz ciągu, lub różnicę tego ciągu, to sposób uznajemy za niepoprawny. Jeżeli zdający podzieli zbiór wszystkich liczb całkowitych czterocyfrowych na rozłączne niepuste podzbiory i zlicza liczby podzielne przez 18 (lub 90) w każdym z tych podzbiorów, to ten sposób uznajemy za poprawny tylko wtedy, gdy popełni błąd w zliczaniu co najwyżej w jednym z tych podzbiorów.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Niech A oznacza zdarzenie, że wylosowana liczba jest podzielna przez 15.
Niech B oznacza zdarzenie, że wylosowana liczba jest podzielna przez 18.
W zadaniu mamy obliczyć prawdopodobieństwo $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$.
Zbiór liczb naturalnych czterocyfrowych zawiera 9000 elementów, zatem $|\Omega| = 9000$.
Do zbioru B należą liczby: $1008,\ 1026,\ 1044,\ \ldots,\ 1008 + (n-1) \cdot 18$ (gdzie $1008 + (n-1) \cdot 18 \leq 9999$, a liczba naturalna n jest liczbą elementów zbioru B).
Ponieważ

$$n \leq \frac{9999 - 1008}{18} + 1 = 500{,}5$$

więc $n = 500$.
Zatem

$$P(B) = \frac{500}{9000} = \frac{5}{90} = \frac{1}{18}.$$

Zdarzenie $A \cap B$ zachodzi tylko wtedy, gdy wylosowana liczba jest jednocześnie podzielna przez 15 i przez 18, czyli przez 90.

Do zbioru $A \cap B$ należą zatem liczby: $1080, 1170, 1260, \ldots, 1080 + (m-1) \cdot 90$ (gdzie $1080 + (m-1) \cdot 90 \leq 9999$, a liczba naturalna m jest liczbą elementów zbioru $A \cap B$).
Ponieważ

$$m \leq \frac{9999 - 1080}{90} + 1 = 100{,}1$$

więc $m = 100$.
Zatem

$$P(A \cap B) = \frac{100}{9000} = \frac{1}{90}.$$

Z definicji prawdopodobieństwa warunkowego otrzymujemy

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{90}}{\frac{1}{18}} = \frac{18}{90} = \frac{1}{5}.$$

Zadanie 10. (0–4)

Wymagania egzaminacyjne 2021	
Wymaganie ogólne	**Wymagania szczegółowe**
IV. Użycie i tworzenie strategii.	Zdający: P8.1) wyznacza równanie prostej przechodzącej przez dwa dane punkty (w postaci kierunkowej lub ogólnej); R8.1) oblicza odległość punktu od prostej.

Zasady oceniania

Zdający otrzymuje .... 1 p.
gdy:

- wyznaczy równanie prostej AB, np.: $y = -7x + 50$

ALBO

- obliczy długość odcinka AB oraz pole trójkąta AOB: $|AB| = 15\sqrt{2}$, $P_{\Delta AOB} = 75$

ALBO

- wyznaczy równanie prostej prostopadłej do AB: $y = \frac{1}{7}x$

Zdający otrzymuje .... 2 p.
gdy:

- zapisze układ równań złożony z równań dwóch prostych: $\begin{cases} y = \frac{1}{7}x \\ y = -7x + 50 \end{cases}$

ALBO

- obliczy promień okręgu, korzystając ze wzoru na odległość punktu od prostej lub obliczając wysokość trójkąta AOB: $r = 5\sqrt{2}$

ALBO

- zapisze, że punkt styczności prostej AB do okręgu ma współrzędne $P = \left(x_0, f(x_0)\right)$ i $f'(x_0) = -7$, gdzie $f(x) = \sqrt{50 - x^2}$ i $50 - x^2 > 0$

ALBO

- zapisze odległość g (lub kwadrat odległości) punktu $(0, 0)$ od dowolnego punktu prostej AB w zależności od jednej zmiennej, np. $g(x) = \sqrt{x^2 + (-7x + 50)^2}$

ALBO

- wyznaczy równanie prostej AB oraz poda współrzędne wektora prostopadłego do prostej AB

Zdający otrzymuje .... 3 p.
gdy zapisze równanie z jedną niewiadomą, prowadzące do obliczenia współrzędnych punktu styczności, np.: $\frac{1}{7}x = -7x + 50$ lub $x^2 + \left(\frac{1}{7}x\right)^2 = 50$, lub $x^2 + (-7x + 50)^2 = 50$, lub $\frac{-2x}{2\sqrt{50-x^2}} = -7$, lub $\sqrt{(x^2 + (-7x + 50)^2)} = \frac{|7\cdot 0+0-50|}{\sqrt{7^2+1^2}}$

Zdający otrzymuje .... 4 p.
gdy zastosuje poprawną metodę i obliczy promień okręgu oraz współrzędne punktu styczności prostej AB do okręgu: $r = 5\sqrt{2}$, $P = (7, 1)$.

Uwagi:

1. Jeżeli zdający realizuje strategię rozwiązania i jedynym błędem zdającego, który jednak nie ułatwia zagadnienia na żadnym etapie rozwiązania, jest błąd polegający na:
   a) zastosowaniu nieistniejącego wzoru $\sqrt{a^2 \pm b^2} = a \pm b$ lub $(a \pm b)^2 = a^2 \pm b^2$
   b) niepoprawnym użyciu współrzędnych punktów A i B przy wyznaczaniu równania prostej AB
   c) niepoprawnym zastosowaniu wzoru na odległość punktu od prostej lub na odległość dwóch punktów, lub wzoru na pole trójkąta, lub równania okręgu
   d) niepoprawnym wyznaczeniu współczynnika kierunkowego prostej prostopadłej do danej prostej
   e) wyznaczeniu jednej z niewiadomych z równania $x^2 + y^2 = 50$ bez koniecznych założeń

   to zdający otrzymuje co najwyżej **2 punkty** za całe rozwiązanie.
2. Jeżeli zdający wyznaczy równanie prostej AB i obliczy promień okręgu stycznego do prostej AB, a następnie poda (bez obliczeń) współrzędne punktu styczności, to otrzymuje:
   – **3 punkty** za całe rozwiązanie, jeśli nie sprawdzi rachunkiem, że punkt $P = (7, 1)$ należy do prostej AB oraz do prostej prostopadłej (lub do prostej AB i okręgu)
   – **4 punkty** za całe rozwiązanie, jeśli sprawdzi, wykonując stosowne obliczenia, że punkt $P = (7, 1)$ należy do prostej AB oraz do prostej prostopadłej (lub do prostej AB i okręgu).
3. Jeżeli zdający odczyta z rysunku współrzędne punktu styczności $P = (7,1)$ (bez obliczeń) i obliczy długość promienia, to otrzymuje **1 punkt** za całe rozwiązanie. Jeżeli zdający nie sporządzi rysunku i poda bez stosownych obliczeń współrzędne punktu styczności $P = (7,1)$ i obliczy długość promienia, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób 1.
Wyznaczamy równanie prostej AB.
Niech $y = ax + b$ będzie równaniem kierunkowym prostej AB.
Punkty A i B leżą na tej prostej, więc:

$$-6 = 8a + b \quad \text{i} \quad 15 = 5a + b$$

Stąd $a = -7$ i $b = 50$.
Prosta AB ma równanie:
– w postaci kierunkowej: $y = -7x + 50$;
– w postaci ogólnej: $7x + y - 50 = 0$.

Obliczamy odległość punktu O od prostej AB:

$$d(O, AB) = \frac{|7 \cdot 0 + 0 - 50|}{\sqrt{7^2 + 1^2}} = \frac{50}{\sqrt{50}} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

Obliczona odległość jest długością promienia okręgu: $d(O, AB) = r = 5\sqrt{2}$.

Przez P oznaczmy punkt styczności prostej AB do okręgu.
Prosta OP przechodzi przez punkt $O = (0, 0)$ i jest prostopadła do prostej AB, więc ma równanie: $y = \frac{1}{7}x$.

Obliczamy współrzędne punktu P:

$$\begin{cases} y = \frac{1}{7}x \\ y = -7x + 50 \end{cases}$$

Rozwiązaniem tego układu jest para liczb $x = 7$ i $y = 1$, więc $P = (7, 1)$.

Sposób 2. Przez układ z okręgiem (1)
Wyznaczamy równanie prostej AB jak w sposobie 1.
Prosta AB ma równanie:
– w postaci kierunkowej: $y = -7x + 50$;
– w postaci ogólnej: $7x + y - 50 = 0$.

Obliczamy odległość punktu O od prostej AB:

$$d(O, AB) = \frac{|7 \cdot 0 + 0 - 50|}{\sqrt{7^2 + 1^2}} = \frac{50}{\sqrt{50}} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

Obliczona odległość jest długością promienia okręgu: $d(O, AB) = r = 5\sqrt{2}$.

Równanie okręgu o środku w punkcie $O = (0, 0)$ i promieniu $r = 5\sqrt{2}$ ma postać $x^2 + y^2 = 50$.
Przez P oznaczmy punkt styczności prostej AB do okręgu $x^2 + y^2 = 50$.
Obliczamy współrzędne punktu P:

$$\begin{cases} y = -7x + 50 \\ x^2 + y^2 = 50 \end{cases}$$

Rozwiązaniem tego układu jest para liczb $x = 7$ i $y = 1$, więc $P = (7, 1)$.

<u>Sposób 3. Przez układ z okręgiem (2)</u>

Wyznaczamy równanie prostej AB jak w sposobie 1.
Prosta AB ma równanie:
– w postaci kierunkowej: $y = -7x + 50$;
– w postaci ogólnej: $7x + y - 50 = 0$.

Obliczamy odległość punktu O od prostej AB:

$$d(O, AB) = \frac{|7 \cdot 0 + 0 - 50|}{\sqrt{7^2 + 1^2}} = \frac{50}{\sqrt{50}} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

Obliczona odległość jest długością promienia okręgu: $d(O, AB) = r = 5\sqrt{2}$.

Równanie okręgu o środku w punkcie $O = (0, 0)$ i promieniu $r = 5\sqrt{2}$ ma postać $x^2 + y^2 = 50$.
Przez P oznaczmy punkt styczności prostej AB do okręgu $x^2 + y^2 = 50$.
Prosta OP przechodzi przez punkt $O = (0, 0)$ i jest prostopadła do prostej AB, więc ma równanie: $y = \frac{1}{7}x$.
Obliczamy współrzędne punktu P:

$$\begin{cases} y = \frac{1}{7}x \\ x^2 + y^2 = 50 \end{cases}$$

Rozwiązaniami tego układu są pary liczb: $\begin{cases} x = 7 \\ y = 1 \end{cases}$ oraz $\begin{cases} x = -7 \\ y = -1 \end{cases}$. Ponieważ punkt o współrzędnych $(-7, -1)$ nie należy do prostej o równaniu $y = -7x + 50$, więc $P = (7, 1)$.

<u>Sposób 4.</u>

Wyznaczamy równanie prostej AB: $y = -7x + 50$ (np. jak w sposobie 1.).
Obliczamy długość odcinka AB:

$$|AB| = \sqrt{(8-5)^2 + (-6-15)^2} = \sqrt{9 + 441} = \sqrt{450} = 15\sqrt{2}$$

Obliczamy pole trójkąta ABO:

$$P = \frac{1}{2}|(5-8)(0+6) - (15+6)(0-8)| = \frac{1}{2}|-18 + 168| = \frac{1}{2} \cdot 150 = 75$$

Promień okręgu jest wysokością tego trójkąta poprowadzoną na bok AB, więc

$$r = \frac{2 \cdot P}{|AB|} = \frac{2 \cdot 75}{15\sqrt{2}} = \frac{150}{15\sqrt{2}} = \frac{10}{\sqrt{2}} = 5\sqrt{2}$$

Przez P oznaczmy punkt styczności prostej AB do okręgu $x^2 + y^2 = 50$.
Obliczamy współrzędne punktu P:

$$\begin{cases} y = -7x + 50 \\ x^2 + y^2 = 50 \end{cases}$$

Rozwiązaniem tego układu jest para liczb $x = 7$ i $y = 1$, więc $P = (7, 1)$.

<u>Sposób 5. Punkt styczności przez pochodną</u>

Wyznaczamy równanie prostej AB jak w sposobie 1.
Prosta AB ma równanie:
– w postaci kierunkowej: $y = -7x + 50$;
– w postaci ogólnej: $7x + y - 50 = 0$.

Obliczamy odległość punktu O od prostej AB:

$$d(O, AB) = \frac{|7 \cdot 0 + 0 - 50|}{\sqrt{7^2 + 1^2}} = \frac{50}{\sqrt{50}} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

Obliczona odległość jest długością promienia okręgu: $d(O, AB) = r = 5\sqrt{2}$.

Równanie okręgu o środku w punkcie $O = (0, 0)$ i promieniu $r = 5\sqrt{2}$ ma postać $x^2 + y^2 = 50$. Przez P oznaczmy punkt styczności prostej AB do okręgu $x^2 + y^2 = 50$. Punkt P leży w I ćwiartce układu współrzędnych (ponieważ prosta AB przechodzi przez I, II i IV ćwiartkę układu współrzędnych), więc punkt P należy do wykresu funkcji f określonej wzorem $f(x) = \sqrt{50 - x^2}$, gdzie $50 - x^2 > 0$. Zatem $P = \big(x_0, f(x_0)\big)$, przy pewnym x_0 takim, że $50 - x_0^2 > 0$ oraz $f'(x_0) = -7$.
Obliczamy współrzędne punktu P:

$$f'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{50 - x^2}}$$

$$-7 = \frac{-x}{\sqrt{50 - x^2}} \quad \text{i} \quad 50 - x^2 > 0$$

Stąd otrzymujemy $x = 7$. Zatem $P = \big(7, f(7)\big) = (7, 1)$.

<u>Sposób 6.</u>

Wyznaczamy równanie prostej AB jak w sposobie 1.
Przez P oznaczmy punkt styczności prostej AB do okręgu.
Wektor $\overrightarrow{OP}$ jest wektorem prostopadłym do prostej AB, więc jest postaci $[7t, t]$, przy pewnym $t \neq 0$. Zatem punkt P ma współrzędne $P = (7t, t)$.
Punkt P należy do prostej AB, więc $7 \cdot 7t + t - 50 = 0$. Stąd $t = 1$ i $P = (7, 1)$. Promień okręgu jest zatem równy $r = |OP| = \sqrt{7^2 + 1^2} = 5\sqrt{2}$.

Zadanie 11. (0–5)

Wymagania egzaminacyjne 2021	
Wymaganie ogólne	**Wymagania szczegółowe**
IV. Użycie i tworzenie strategii.	Zdający: R3.1) stosuje wzory Viète'a; R3.2) rozwiązuje równania i nierówności liniowe i kwadratowe z parametrem; R3.7) rozwiązuje proste nierówności wymierne […].

Zasady oceniania

Rozwiązanie składa się z trzech etapów.

Pierwszy etap polega na rozwiązaniu nierówności $\Delta > 0$: $m \neq 1$.
Za poprawne rozwiązanie tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**.

Uwaga do pierwszego etapu:
Jeżeli zdający rozwiązuje nierówność $\Delta \geq 0$, to za pierwszy etap otrzymuje **0 punktów**.

Drugi etap polega na rozwiązaniu nierówności $x_1 + x_2 \leq \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$.
Za poprawne rozwiązanie drugiego etapu zdający otrzymuje **3 punkty**.
Podział punktów za drugi etap rozwiązania:

1 punkt zdający otrzymuje, gdy:

- przekształci nierówność $x_1 + x_2 \leq \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ do postaci $x_1 + x_2 \leq \frac{x_1+x_2}{x_1 \cdot x_2}$ lub

$$(x_1 + x_2) \cdot (x_1 x_2)^2 \leq (x_1 + x_2) x_1 x_2$$

ALBO

- wyznaczy pierwiastki trójmianu $4x^2 - 2(m+1)x + m$: $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{m}{2}$.

2 punkty zdający otrzymuje, gdy zapisze nierówność z jedną niewiadomą m:

$$\frac{2(m+1)}{4} \leq \frac{\frac{2(m+1)}{4}}{\frac{m}{4}} \quad \text{lub} \quad \frac{1}{2} + \frac{m}{2} \leq 2 + \frac{2}{m} \quad \text{lub} \quad \frac{2(m+1)}{4} \cdot \left(\frac{m}{4}\right)^2 \leq \frac{2(m+1)}{4} \cdot \frac{m}{4}$$

3 punkty zdający otrzymuje, gdy rozwiąże nierówność $\frac{2(m+1)}{4} \leq \frac{\frac{2(m+1)}{4}}{\frac{m}{4}}$:

$m \in (-\infty, -1\rangle \cup (0, 4\rangle$.

Uwagi do drugiego etapu:

1. Jeżeli zdający, rozwiązując nierówność $\frac{2(m+1)}{4} \le \frac{\frac{2(m+1)}{4}}{\frac{m}{4}}$, nie uwzględni warunku $m \neq 0$, to za drugi etap może otrzymać co najwyżej **2 punkty**.
2. Jeżeli zdający:
   - mnoży nierówność $x_1 + x_2 \le \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ stronami przez iloczyn $x_1 \cdot x_2$ bez rozpatrzenia znaku tego iloczynu

   ALBO
   - dzieli nierówność $x_1 + x_2 \le \frac{x_1 + x_2}{x_1 \cdot x_2}$ stronami przez sumę $x_1 + x_2$ bez rozpatrzenia znaku tej sumy

   to za drugi etap może otrzymać co najwyżej **1 punkt**.

Trzeci etap polega na wyznaczeniu szukanych wartości parametru m:
$m \in (-\infty, -1\rangle \cup (0,1) \cup (1,4\rangle$.
Za poprawne rozwiązanie tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**.

Uwagi do trzeciego etapu:
1. Jeżeli zdający popełni błędy rachunkowe w etapach I i II (nie otrzymując pustego zbioru rozwiązań ani zbioru $\mathbb{R}$ wszystkich liczb rzeczywistych), lecz konsekwentnie wyznaczy iloczyn w etapie III, to za III etap otrzymuje **1 punkt**.
2. Zdający może otrzymać **1 punkt** za III etap, jeżeli jedynymi błędami jakie popełni w I i II etapie są błędy rachunkowe.

Przykładowe pełne rozwiązanie
I etap
Trójmian $4x^2 - 2(m+1)x + m$ ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste wtedy i tylko wtedy, gdy jego wyróżnik jest dodatni, czyli

$$\Delta = [-2(m+1)]^2 - 4 \cdot 4 \cdot m > 0$$

i równoważnie dalej

$$4m^2 - 8m + 4 > 0$$

$$4(m-1)^2 > 0$$

$$m \neq 1$$

II etap
Warunek $x_1 + x_2 \le \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ ma sens liczbowy tylko wtedy, gdy żaden z pierwiastków trójmianu $4x^2 - 2(m+1)x + m$ nie jest równy 0, czyli gdy $x_1 x_2 \neq 0$. Ze wzoru Viète'a otrzymujemy $\frac{m}{4} \neq 0$, czyli $m \neq 0$.
Nierówność $x_1 + x_2 \le \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ zapisujemy w postaci równoważnej $x_1 + x_2 \le \frac{x_1+x_2}{x_1 \cdot x_2}$ i po zastosowaniu wzorów Viète'a otrzymujemy

$$\frac{2(m+1)}{4} \leq \frac{\frac{2(m+1)}{4}}{\frac{m}{4}}$$

i równoważnie dalej

$$\frac{(m+1)}{2} \leq \frac{2(m+1)}{m}$$

$$\frac{2(m+1)}{m} - \frac{m+1}{2} \geq 0$$

$$\frac{4(m+1) - m(m+1)}{2m} \geq 0$$

$$2m(m+1)(4-m) \geq 0 \quad \text{i} \quad m \neq 0$$

Stąd $m \in (-\infty, -1\rangle \cup (0, 4\rangle$.

III etap

Wyznaczamy część wspólną zbiorów rozwiązań nierówności otrzymanych w I i II etapie rozwiązania: $m \in (-\infty, -1\rangle \cup (0, 1) \cup (1, 4\rangle$.

Uwaga:

Zamiast korzystać ze wzorów Viète'a, możemy wzór trójmianu $4x^2 - 2(m+1)x + m$ zapisać w postaci równoważnej:

$$4x^2 - 2mx - 2x + m = 2x(2x - m) - (2x - m) = (2x - 1)(2x - m)$$

Stąd wynika, że pierwiastkami tego trójmianu są liczby $x_1 = \frac{1}{2}$ oraz $x_2 = \frac{m}{2}$ dla każdej wartości parametru m. Pierwiastki są różne wtedy i tylko wtedy, gdy $m \neq 1$.

Pierwiastki te można też wyznaczyć, korzystając ze wzorów na pierwiastki trójmianu kwadratowego. Ponieważ wyróżnik Δ trójmianu $4x^2 - 2(m+1)x + m$ jest kwadratem wyrażenia $2(m-1)$, więc

$$x_1 = \frac{2(m+1) - 2(m-1)}{2 \cdot 4} = \frac{1}{2}$$

$$x_2 = \frac{2(m+1) + 2(m-1)}{2 \cdot 4} = \frac{m}{2}$$

Wtedy nierówność $x_1 + x_2 \leq \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ przyjmie postać $\frac{1}{2} + \frac{m}{2} \leq 2 + \frac{2}{m}$

Nierówność ta ma sens liczbowy tylko dla $m \neq 0$.

Przekształcając nierówność $\frac{1}{2} + \frac{m}{2} \leq 2 + \frac{2}{m}$, otrzymujemy kolejno

$$\frac{m}{2} - \frac{2}{m} - \frac{3}{2} \leq 0$$

$$\frac{m^2 - 3m - 4}{2m} \leq 0$$

$$\frac{(m+1)(m-4)}{2m} \le 0$$

$$2m(m+1)(m-4) \le 0 \quad \text{i} \quad m \neq 0$$

Stąd $m \in (-\infty, -1\rangle \cup (0, 4\rangle$.

Uwzględniając uzyskany wcześniej warunek $m \neq 1$, otrzymujemy ostatecznie $m \in (-\infty, -1\rangle \cup (0, 1) \cup (1, 4\rangle$.

Zadanie 12. (0–5)

Wymagania egzaminacyjne 2021	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
IV. Użycie i tworzenie strategii.	Zdający: R6.6) rozwiązuje równania trygonometryczne […].

Zasady oceniania

Zdający otrzymuje .... 1 p.
gdy:

- zapisze alternatywę równań $\cos x - \sin x = 0$ lub $\cos x + \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

ALBO

- zastosuje wzór na cosinus podwojonego argumentu i zapisze równanie $\cos 2x = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x - \sin x)$ w postaci

$$(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x - \sin x)$$

ALBO

- zapisze równanie $\cos 2x = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x - \sin x)$ w postaci
$\cos 2x = \cos x \cdot \cos\frac{\pi}{4} - \sin x \cdot \sin\frac{\pi}{4}$ lub $\cos 2x = \cos x \cdot \sin\frac{\pi}{4} - \sin x \cdot \cos\frac{\pi}{4}$

Zdający otrzymuje .... 2 p.
gdy:

- zapisze alternatywę równań $\cos x - \sin x = 0$ lub $\cos x + \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ i spełni jeden z poniższych warunków:
  1) rozwiąże równanie $\cos x - \sin x = 0$: $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, gdzie k jest liczbą całkowitą, lub $x = \frac{\pi}{4}$,
  2) przekształci równanie $\cos x + \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ do postaci $\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \frac{1}{2}$,

3) skorzysta z „jedynki trygonometrycznej”, zapisze układ równań $\begin{cases} \cos x + \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \end{cases}$

i przekształci go do równania, w którym występuje jedna funkcja trygonometryczna zmiennej x:

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \cos x\right)^2 + \cos^2 x = 1 \quad \text{lub} \quad \sin^2 x + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \sin x\right)^2 = 1$$

$$\text{lub} \quad 2\cos^2 x - \sqrt{2}\cos x - \frac{1}{2} = 0 \quad \text{lub} \quad 2\sin^2 x - \sqrt{2}\sin x - \frac{1}{2} = 0$$

ALBO

- przekształci równanie $\cos 2x = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x - \sin x)$ do postaci $\cos 2x = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

Zdający otrzymuje .... 3 p.
gdy:

- rozwiąże równanie $\cos x - \sin x = 0$: $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, gdzie k jest liczbą całkowitą, lub $x = \frac{\pi}{4}$ oraz spełni jeden z poniższych warunków:

  1) przekształci równanie $\cos x + \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ do postaci $\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \frac{1}{2}$

  2) skorzysta z „jedynki trygonometrycznej”, zapisze układ równań $\begin{cases} \cos x + \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \end{cases}$

  i przekształci go do równania, w którym występuje jedna funkcja trygonometryczna zmiennej x:

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \cos x\right)^2 + \cos^2 x = 1 \quad \text{lub} \quad \sin^2 x + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \sin x\right)^2 = 1$$

$$\text{lub} \quad 2\cos^2 x - \sqrt{2}\cos x - \frac{1}{2} = 0 \quad \text{lub} \quad 2\sin^2 x - \sqrt{2}\sin x - \frac{1}{2} = 0$$

ALBO

- zapisze alternatywę równań $\cos x - \sin x = 0$ lub $\cos x + \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ **oraz** zapisze poprawnie jedną serię rozwiązań równania $\cos x + \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$: $\frac{\pi}{4} - x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ lub $\frac{\pi}{4} - x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$, gdzie k jest liczbą całkowitą

ALBO

- zapisze poprawnie jedną serię rozwiązań równania $\cos 2x = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$: $2x = x + \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ lub $2x = -\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 2k\pi$, gdzie k jest liczbą całkowitą (bez wyznaczenia rozwiązań z danego przedziału), albo zapisze poprawnie jedno rozwiązanie w przedziale $\langle 0, \pi\rangle$: $\frac{\pi}{4}$ lub $\frac{7\pi}{12}$.

ALBO

- zastosuje wzór na różnicę cosinusów i przekształci równanie $\cos 2x = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ do postaci:

$$-2\sin\left(\frac{2x+x+\frac{\pi}{4}}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{2x-x-\frac{\pi}{4}}{2}\right)=0$$

Zdający otrzymuje .... 4 p.
gdy:

- rozwiąże równanie $\cos x-\sin x=0$ w przedziale $\langle 0,\pi\rangle$: $\frac{\pi}{4}$ i spełni jeden z poniższych warunków:

  1) rozwiąże równanie $\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\frac{1}{2}$ i poda dwie serie rozwiązań:
     $\frac{\pi}{4}-x=\frac{\pi}{3}+2k\pi$ oraz $\frac{\pi}{4}-x=-\frac{\pi}{3}+2k\pi$, gdzie k jest liczbą całkowitą (bez wyznaczenia rozwiązań z danego przedziału)

  2) przekształci równanie $2\sin^2 x-\sqrt{2}\sin x-\frac{1}{2}=0$ do alternatywy:
     $\sin x=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ lub $\sin x=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$
     ALBO
     przekształci równanie $2\cos^2 x-\sqrt{2}\cos x-\frac{1}{2}=0$ do alternatywy:
     $\cos x=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ lub $\cos x=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

ALBO

- zapisze poprawnie dwie serie rozwiązań równania $\cos 2x=\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$:
  $2x=x+\frac{\pi}{4}+2k\pi$ oraz $2x=-\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+2k\pi$, gdzie k jest liczbą całkowitą (bez wyznaczenia rozwiązań z danego przedziału)

ALBO

- rozwiąże równanie $\sin\left(\frac{3}{2}x+\frac{\pi}{8}\right)=0$ w przedziale $\langle 0,\pi\rangle$: $\frac{7\pi}{12}$

ALBO

- rozwiąże równanie $\sin\left(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{8}\right)=0$ w przedziale $\langle 0,\pi\rangle$: $\frac{\pi}{4}$

ALBO

- zapisze poprawnie dwie serie rozwiązań równań $\sin\left(\frac{3}{2}x+\frac{\pi}{8}\right)=0$ i $\sin\left(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{8}\right)=0$:
  $x=-\frac{\pi}{12}+\frac{2}{3}k\pi$ oraz $x=\frac{\pi}{4}+2k\pi$, gdzie k jest liczbą całkowitą

Zdający otrzymuje .... 5 p.

gdy zastosuje poprawną metodę rozwiązania równania $\cos 2x=\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x-\sin x)$ i poda prawidłowe rozwiązania w przedziale $\langle 0,\pi\rangle$: $\frac{\pi}{4}$, $\frac{7\pi}{12}$.

Uwagi:
1. Jeśli zdający zapisze równanie

$$(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)=\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x-\sin x)$$

i podzieli obie strony równania przez $\cos x - \sin x$ (bez rozstrzygania sytuacji, gdy $\cos x = \sin x$), otrzyma równanie $\cos x + \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ i doprowadzi rozwiązanie do końca, to traktujemy to jako błąd merytoryczny, nie przekreślający całości rozwiązania i zdający może otrzymać co najwyżej **3 punkty** za całe rozwiązanie.

2. Jeżeli jedynym błędem zdającego jest błąd przy przepisywaniu wzoru trygonometrycznego, np. zapisuje sinus sumy argumentów zamiast sinusa ich różnicy, i konsekwentnie doprowadzi rozwiązanie do końca, to zdający może otrzymać **3 punkty** za całe rozwiązanie.
3. Jeżeli zdający, rozwiązując jedno z otrzymanych równań, stosuje metodę analizy starożytnych, np. podnosi obie strony równania $\cos x + \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ do kwadratu i nie odrzuci rozwiązań obcych, to za całe rozwiązanie może otrzymać co najwyżej **3 punkty**.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób 1.

Ponieważ

$$\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x - \sin x) = \cos x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \sin x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos x \cdot \cos\frac{\pi}{4} - \sin x \cdot \sin\frac{\pi}{4} = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right),$$

więc równanie $\cos 2x = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x - \sin x)$ można zapisać w postaci równoważnej

$$\cos 2x = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

Jego rozwiązaniami są liczby x spełniające warunek

$$2x = x + \frac{\pi}{4} + 2k\pi \quad \text{lub} \quad 2x = -\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 2k\pi$$

gdzie k jest liczbą całkowitą.

Stąd $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ lub $3x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$, czyli $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ lub $x = -\frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}k\pi$.

Zatem rozwiązaniami równania $\cos 2x = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x - \sin x)$ w przedziale $\langle 0, \pi\rangle$ są liczby: $\frac{\pi}{4}$ oraz $\frac{7\pi}{12}$.

Sposób 2.

Po skorzystaniu ze wzoru na cosinus podwojonego argumentu otrzymujemy równanie

$$(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x - \sin x)$$

Jest ono równoważne alternatywie dwóch równań:

$$\cos x - \sin x = 0 \quad \text{lub} \quad \cos x + \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Równanie $\cos x - \sin x = 0$ można rozwiązać graficznie albo algebraicznie, zapisując je z wykorzystaniem wzoru redukcyjnego np. w postaci $\cos x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$. Rozwiązaniami ostatniego równania są liczby spełniające warunek $x=\frac{\pi}{2}-x+2k\pi$ lub $x=-\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+2k\pi$, gdzie k jest dowolną liczbą całkowitą. Stąd $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$, gdzie k jest dowolną liczbą całkowitą, więc rozwiązaniem równania $\cos x-\sin x=0$ w przedziale $\langle 0,\pi\rangle$ jest liczba $\frac{\pi}{4}$.

Równanie $\cos x+\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ rozwiązujemy, stosując wzory redukcyjne oraz wzór na sumę sinusów. Otrzymujemy kolejno:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$2\sin\left(\frac{\frac{\pi}{2}-x+x}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\frac{\pi}{2}-x-x}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$2\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\frac{1}{2}$$

Rozwiązaniami otrzymanego równania są liczby spełniające warunek
$\frac{\pi}{4}-x=\frac{\pi}{3}+2k\pi$ lub $\frac{\pi}{4}-x=-\frac{\pi}{3}+2k\pi$, gdzie k jest dowolną liczbą całkowitą.
Stąd $x=-\frac{\pi}{12}+2k\pi$ lub $x=\frac{7\pi}{12}+2k\pi$, gdzie k jest dowolną liczbą całkowitą.
Zatem rozwiązaniem równania $\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\frac{1}{2}$ w przedziale $\langle 0,\pi\rangle$ jest liczba $\frac{7\pi}{12}$.
Ostatecznie, rozwiązaniami równania $\cos 2x=\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x-\sin x)$ w przedziale $\langle 0,\pi\rangle$ są liczby $\frac{\pi}{4}$ oraz $\frac{7\pi}{12}$.

<u>Sposób 3.</u> Po skorzystaniu ze wzoru na cosinus podwojonego argumentu otrzymujemy równanie

$$(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)=\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x-\sin x)$$

Jest ono równoważne alternatywie dwóch równań:

$$\cos x-\sin x=0 \quad \text{lub} \quad \cos x+\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Równanie $\cos x-\sin x=0$ można rozwiązać graficznie albo algebraicznie, zapisując je z wykorzystaniem wzoru redukcyjnego np. w postaci $\cos x=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$. Rozwiązaniami ostatniego równania są liczby spełniające warunek $x=\frac{\pi}{2}-x+2k\pi$ lub $x=-\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+2k\pi$, gdzie k jest dowolną liczbą całkowitą. Stąd $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$, gdzie k jest dowolną liczbą całkowitą, więc rozwiązaniem równania $\cos x-\sin x=0$ w przedziale $\langle 0,\pi\rangle$ jest liczba $\frac{\pi}{4}$.

Równanie $\cos x+\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ rozwiązujemy, stosując wzór $\cos^2 x+\sin^2 x=1$.

Zapisujemy układ równań

$$\begin{cases} \cos x + \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos^2 x + \sin^2 x = 1 \end{cases}$$

Stąd otrzymujemy kolejno

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \sin x\right)^2 + \sin^2 x - 1 = 0$$

$$2\sin^2 x - \sqrt{2}\sin x - \frac{1}{2} = 0$$

Podstawiamy $\sin x = t$ i wtedy $2t^2 - \sqrt{2}t - \frac{1}{2} = 0$.

Rozwiązaniami tego równania są $t = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ lub $t = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$.

Ponieważ

$$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin 45° \cdot \cos 60° + \cos 45° \cdot \sin 60° = \sin 105°$$

i $\sin 105° + \cos 105° = \frac{\sqrt{2}}{2}$, więc $x = 105° = \frac{7\pi}{12}$ jest rozwiązaniem równania $\cos x + \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ w przedziale $\langle 0, \pi\rangle$.

Ponieważ $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} < 0$, więc równanie $\sin x = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$ nie ma rozwiązań w przedziale $\langle 0, \pi\rangle$.

Ostatecznie, rozwiązaniami równania $\cos 2x = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x - \sin x)$ w przedziale $\langle 0, \pi\rangle$ są liczby $\frac{\pi}{4}$ oraz $\frac{7\pi}{12}$.

<u>Sposób 4.</u>

Przekształcamy równanie jak w sposobie 1. do postaci $\cos 2x = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$, skąd

$$\cos 2x - \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

Stosujemy wzór na różnicę cosinusów i otrzymujemy:

$$-2\sin\left(\frac{2x + x + \frac{\pi}{4}}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{2x - x - \frac{\pi}{4}}{2}\right) = 0$$

Stąd

$$\sin\left(\frac{3}{2}x + \frac{\pi}{8}\right) = 0 \quad \text{lub} \quad \sin\left(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{8}\right) = 0$$

więc $\frac{3}{2}x + \frac{\pi}{8} = k\pi$ lub $\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{8} = k\pi$, gdzie k jest liczbą całkowitą, czyli $x = -\frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}k\pi$ lub $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$, gdzie k jest liczbą całkowitą.

Rozwiązaniami równania $\cos 2x = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ w przedziale $\langle 0, \pi\rangle$ są liczby $\frac{7\pi}{12}$ oraz $\frac{\pi}{4}$.

Zadanie 13. (0–4)

Wymagania egzaminacyjne 2021	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
IV. Użycie i tworzenie strategii.	Zdający: R7.4) znajduje związki miarowe w figurach płaskich […].

Zasady oceniania

Zdający otrzymuje .... 1 p.
gdy:
- zapisze zależność między długościami boków trójkąta ABC, wykorzystując warunek dotyczący promienia, np.: $\frac{a+b-c}{2}=\frac{1}{5}c$

ALBO
- zapisze zależności między długościami boków trójkąta ABC, długościami dwóch odcinków stycznych i promieniem okręgu wpisanego w trójkąt , np. $a=x+r$, $b=y+r$, $5r=x+y$

ALBO
- zapisze tangensy kątów $\frac{\alpha}{2}$ i $\frac{\beta}{2}$ w zależności od r, x i y, np.: $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{r}{y}$, $\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}=\frac{r}{x}$

Zdający otrzymuje .... 2 p.
gdy:
- zapisze równanie kwadratowe z dwiema niewiadomymi wynikające z zastosowania twierdzenia Pitagorasa, np.:

$$a^2+\left(\frac{7}{5}c-a\right)^2=c^2 \text{ lub } a^2+(7r-a)^2=(5r)^2$$

ALBO
- zapisze równanie trygonometryczne prowadzące do wyznaczenia kąta ostrego trójkąta, np.:

$$\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{7}{5}$$

ALBO
- zapisze równanie trygonometryczne prowadzące do wyznaczenia kąta ostrego trójkąta, np.:

$$\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}+\frac{1+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}=5$$

ALBO
- zapisze równanie trygonometryczne prowadzące do wyznaczenia kąta ostrego trójkąta, np.:

$$25\cdot\sin2\alpha=24$$

Zdający otrzymuje .... 3 p.
gdy:

- rozwiąże otrzymane równanie kwadratowe (np.: $a = \frac{3}{5}c$ lub $a = \frac{4}{5}c$) lub obliczy stosunek dwóch różnych boków trójkąta, np.: $\frac{a}{c} = \frac{3}{5}$ lub $\frac{a}{c} = \frac{4}{5}$

ALBO

- rozwiąże otrzymane równanie kwadratowe i obliczy zależność między długością przyprostokątnej trójkąta i promieniem okręgu wpisanego, np.: $a = 4r$ lub $a = 3r$

ALBO

- zapisze równanie, w którym występuje tylko sinus/cosinus kąta ostrego trójkąta, np. $\sin^2\alpha + \left(\frac{7}{5} - \sin\alpha\right)^2 = 1$

ALBO

- rozwiąże równanie $\frac{1}{\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)} + \frac{1+\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{1-\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = 5$ z niewiadomą $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$: $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{3}$ lub $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}$

ALBO

- zapisze dwa równania z tą samą niewiadomą

$$1 - 2\sin^2\alpha = \frac{7}{25} \text{ lub } 1 - 2\sin^2\alpha = -\frac{7}{25}.$$

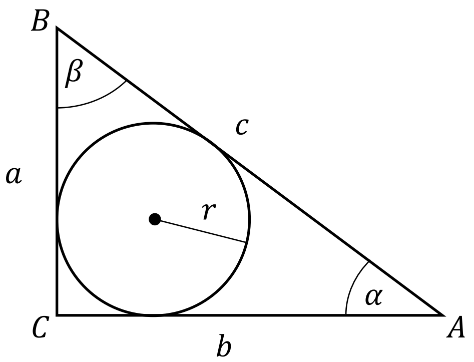
Zdający otrzymuje .... 4 p.
gdy zastosuje poprawną metodę i obliczy wartość sinusa większego z kątów ostrych trójkąta: $\frac{4}{5}$.

Uwagi:

1. Jeżeli zdający, realizując strategię rozwiązania zadania, popełnia błędy rachunkowe, które nie przekreślają poprawności rozumowania i doprowadza rozwiązanie do końca to może otrzymać co najwyżej **3 punkty** za całe rozwiązanie.
2. Jeżeli zdający rozwiąże zadanie do końca i w odpowiedzi zapisuje: $\sin\alpha = \frac{4}{5}$ oraz $\sin\beta = \frac{3}{5}$, to otrzymuje **3 punkty** za całe rozwiązanie.
3. Jeżeli zdający, realizując strategię rozwiązania zadania, popełni błąd merytoryczny i doprowadza rozwiązanie do końca, to może otrzymać maksymalnie **2 punkty** za całe rozwiązanie, o ile wcześniej zdający nie nabył praw do otrzymania 3 punktów.
4. Jeżeli zdający zapisze bez uzasadnienia, że boki trójkąta mają długości $3r$, $4r$, $5r$ i w odpowiedzi poda sinus większego z kątów ostrych, to otrzymuje **1 punkt** za całe rozwiązanie.
5. Jeżeli zdający błędnie założy, że $r > c$, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób 1.
Przyjmijmy następujące oznaczenia:
a, b, c – długości boków trójkąta ABC
α, β – miary kątów ostrych trójkąta
r – promień okręgu wpisanego w trójkąt ABC. (Zobacz rysunek).



Wtedy $a^2 + b^2 = c^2$ oraz $r = \frac{a+b-c}{2}$.

Z warunków zadania wynika, że $r = \frac{1}{5}c$.

Zatem

$$\frac{c}{5} = \frac{a+b-c}{2}$$

$$2c = 5a + 5b - 5c$$

$$b = \frac{7}{5}c - a$$

Podstawiając otrzymaną zależność do równości wynikającej z twierdzenia Pitagorasa, otrzymujemy:

$$a^2 + \left(\frac{7}{5}c - a\right)^2 = c^2$$

$$2a^2 - \frac{14}{5}ac + \frac{24}{25}c^2 = 0$$

$$25a^2 - 35ac + 12c^2 = 0$$

Potraktujmy otrzymane równanie jak równanie kwadratowe z niewiadomą a i parametrem c. Otrzymujemy zatem

$$\Delta = (-35c)^2 - 4 \cdot 25 \cdot 12c^2 = 25c^2$$

$$a = \frac{35c - 5c}{50} = \frac{3}{5}c \quad \text{lub} \quad a = \frac{35c + 5c}{50} = \frac{4}{5}c$$

Gdy $a = \frac{3}{5}c$, to wtedy $b = \frac{7}{5}c - \frac{3}{5}c = \frac{4}{5}c$, a gdy $a = \frac{4}{5}c$, to $b = \frac{7}{5}c - \frac{4}{5}c = \frac{3}{5}c$. W każdym z tych przypadków otrzymujemy więc taki sam trójkąt (z dokładnością do oznaczeń). Bez straty ogólności można przyjąć, że $a=\frac{3}{5}c$ i $b=\frac{4}{5}c$. Przy oznaczeniach z rysunku mamy $\sin\alpha=\frac{a}{c}=\frac{\frac{3}{5}c}{c}=\frac{3}{5}$ oraz $\sin\beta=\frac{b}{c}=\frac{\frac{4}{5}c}{c}=\frac{4}{5}$. Kąty α i β są ostre, więc ten z nich ma większą miarę, dla którego sinus przyjmuje większą wartość.

Zatem sinus większego z kątów ostrych trójkąta ABC jest równy $\frac{4}{5}$.

Uwaga:

Równanie $25a^2-35ac+12c^2=0$ możemy też podzielić stronami przez c^2. Otrzymujemy wtedy równanie kwadratowe $25\left(\frac{a}{c}\right)^2-35\cdot\left(\frac{a}{c}\right)+12=0$ z niewiadomą $\frac{a}{c}$. Rozwiązując to równanie, otrzymujemy $\frac{a}{c}=\frac{3}{5}$ lub $\frac{a}{c}=\frac{4}{5}$. Są to wartości sinusa kąta α.

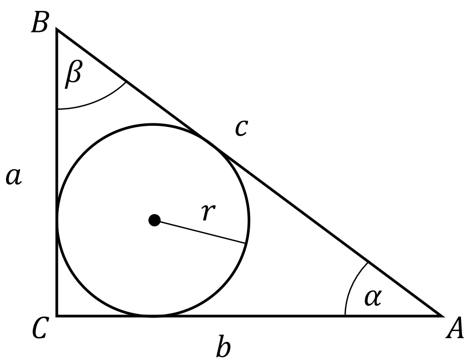
<u>Sposób 2. (równość odcinków stycznych oraz twierdzenie Pitagorasa).</u>

Przyjmijmy następujące oznaczenia:

a, b, c – długości boków trójkąta ABC

α, β – miary kątów ostrych trójkąta

r – promień okręgu wpisanego w trójkąt ABC. (Zobacz rysunek).



Zakładamy, że bok BC jest sumą odcinków o długościach $a-r$ oraz r.

Ponieważ z treści zadania wynika, że $c=5r$, więc na mocy równości odcinków stycznych, przeciwprostokątna jest sumą odcinków o długościach $a-r$ oraz $5r-(a-r)=6r-a$.

Otrzymujemy zatem trójkąt prostokątny ABC, którego boki mają długości: a, $7r-a$ oraz $5r$.

Stosujemy twierdzenie Pitagorasa i zapisujemy równanie z dwiema niewiadomymi:

$$a^2+(7r-a)^2=(5r)^2$$

To równanie jest równoważne równaniu $a^2-7ar+12r^2=0$.

Powyższe równanie traktujemy jako równanie kwadratowe z niewiadomą a i z parametrem r.

Obliczamy wyróżnik:

$$\Delta=(-7r)^2-4\cdot1\cdot12r^2=r^2$$

i otrzymujemy dwa rozwiązania:

$$a=\frac{7r+r}{2}=4r \text{ oraz } a=\frac{7r-r}{2}=3r$$

Jeśli $a=4r$, to wtedy $b=7r-4r=3r$. Jeśli $a=3r$, to $b=7r-3r=4r$.

W każdym z tych przypadków otrzymujemy więc taki sam trójkąt (z dokładnością do oznaczeń). Bez straty ogólności można przyjąć, że $a = 4r$ i $b = 3r$.

Przy oznaczeniach z rysunku mamy $\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{4r}{5r} = \frac{4}{5}$ oraz $\sin\beta = \frac{b}{c} = \frac{3r}{5r} = \frac{3}{5}$. Ponieważ kąty α i β są ostre, więc ten z nich ma większą miarę, którego sinus przyjmuje większą wartość.

Zatem sinus większego z kątów ostrych trójkąta ABC jest równy $\frac{4}{5}$.

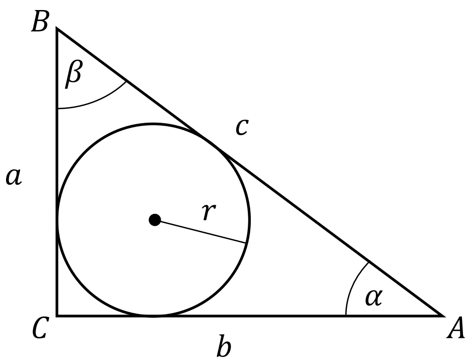
<u>Sposób 3.</u>

Przyjmijmy następujące oznaczenia:

a, b, c – długości boków trójkąta ABC

α, β – miary kątów ostrych trójkąta

r – promień okręgu wpisanego w trójkąt ABC. (Zobacz rysunek).



Wtedy $a^2 + b^2 = c^2$ oraz $r = \frac{a+b-c}{2}$. Z warunków zadania wynika, że $r = \frac{1}{5}c$. Zatem

$$\frac{c}{5} = \frac{a+b-c}{2}$$

$$2c = 5a + 5b - 5c$$

$$5a + 5b = 7c$$

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{7}{5}$$

Ponieważ $\frac{a}{c} = \sin\alpha$ i $\frac{b}{c} = \cos\alpha$, więc możemy zapisać równanie trygonometryczne

$$\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{7}{5}$$

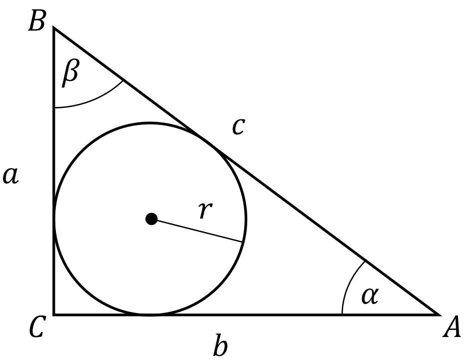
Z układu równań

$$\begin{cases} \sin\alpha + \cos\alpha = \frac{7}{5} \\ \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \end{cases}$$

obliczamy $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ lub $\sin\alpha = \frac{4}{5}$. Wówczas – odpowiednio do otrzymanych wartości $\sin\alpha$ – mamy: $\cos\alpha = \frac{4}{5} = \sin\beta$ lub $\cos\alpha = \frac{3}{5} = \sin\beta$.

Kąty α i β są ostre, więc ten z nich ma większą miarę, dla którego sinus przyjmuje większą wartość. Zatem sinus większego z kątów ostrych trójkąta ABC jest równy $\frac{4}{5}$.

Sposób 4. (pole i obwód trójkąta).
Przyjmijmy następujące oznaczenia:
a, b, c – długości boków trójkąta ABC
α, β – miary kątów ostrych trójkąta
r – promień okręgu wpisanego w trójkąt ABC. (Zobacz rysunek).



Ponieważ z treści zadania wynika, że $c = 5r$, więc ze wzoru na promień okręgu wpisanego w ten trójkąt otrzymujemy zależność

$$r = \frac{a + b - 5r}{2}$$

Zatem

$$a + b = 7r$$

Ponadto wiemy, że pole trójkąta jest równe iloczynowi promienia okręgu wpisanego i połowy obwodu trójkąta, więc

$$P_\Delta = r \cdot p = r \cdot \frac{1}{2}(a + b + c) = r \cdot \frac{1}{2}(7r + 5r) = 6r^2$$

Zapisujemy zatem układ równań

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \cdot a \cdot b = 6r^2 \\ a + b = 7r \end{cases}$$

Ponieważ $b = 7r - a$, więc pierwsze równanie przyjmuje postać $a \cdot (7r - a) = 12r^2$. Po przekształceniach otrzymujemy równoważne równanie kwadratowe, w którym możemy przyjąć, że niewiadomą jest a, natomiast parametrem r:

$$-a^2 + 7ar - 12r^2 = 0$$

Obliczamy wyróżnik trójmianu stojącego po lewej stronie równania:

$$\Delta = (7r)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-12r^2) = r^2$$

i otrzymujemy dwa rozwiązania:

$$a = \frac{-7r + r}{-2} = 3r \text{ oraz } a = \frac{-7r - r}{-2} = 4r$$

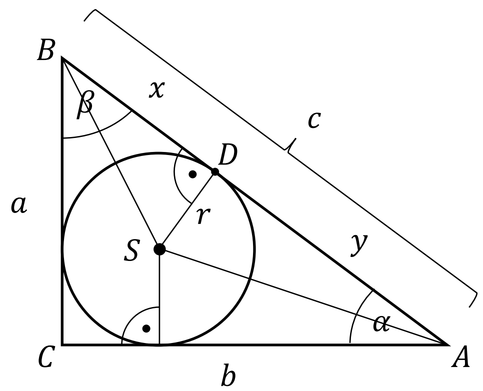
Jeśli $a = 3r$, to wtedy $b = 7r - 3r = 4r$. Jeśli $a = 4r$, to $b = 7r - 4r = 3r$.
W każdym z tych przypadków otrzymujemy więc taki sam trójkąt (z dokładnością do oznaczeń). Bez straty ogólności można przyjąć, że $a = 3r$ i $b = 4r$.

Przy oznaczeniach z rysunku mamy $\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{3r}{5r} = \frac{3}{5}$ oraz $\sin\beta = \frac{b}{c} = \frac{4r}{5r} = \frac{4}{5}$. Ponieważ kąty α i β są ostre, więc ten z nich ma większą miarę, którego sinus przyjmuje większą wartość.

Zatem sinus większego z kątów ostrych trójkąta ABC jest równy $\frac{4}{5}$.

<u>Sposób 5.</u>

Przyjmijmy następujące oznaczenia:
S – środek okręgu wpisanego w trójkąt ABC
D – punkt styczności okręgu wpisanego z prostą zawierającą przeciwprostokątną trójkąta
a, b, c – długości boków trójkąta ABC
α, β – miary kątów ostrych trójkąta
r – promień okręgu wpisanego w trójkąt ABC. (Zobacz rysunek).



Środek S okręgu wpisanego w trójkąt jest punktem przecięcia dwusiecznych kątów wewnętrznych trójkąta. Zatem $|\measuredangle DAS| = \frac{1}{2}\alpha$ i $|DBS| = \frac{1}{2}\beta$. Z definicji tangensa kąta ostrego otrzymujemy $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{r}{y}$ oraz $\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{r}{x}$. Stąd

$$x = \frac{r}{\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}} \quad \text{oraz} \quad y = \frac{r}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$$

Z założenia wiemy, że $x + y = c = 5r$. Zatem

$$\frac{r}{\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}} + \frac{r}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}} = 5r$$

$$\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}} + \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}} = 5$$

Po uwzględnieniu zależności $\alpha + \beta = 90°$ otrzymujemy

$$\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}+\frac{1}{\operatorname{tg}\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)}=5$$

Stosujemy wzór na tangens różnicy kątów i przekształcamy otrzymane równanie

$$\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}+\frac{1+\operatorname{tg}45^\circ\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{\operatorname{tg}45^\circ-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}=5$$

$$\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}+\frac{1+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}=5$$

$$1-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+\left(1+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=5\left(1-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$$

$$6\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)^2-5\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+1=0$$

$$\left(2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}-1\right)\left(3\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}-1\right)=0$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}\quad\text{lub}\quad\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{3}$$

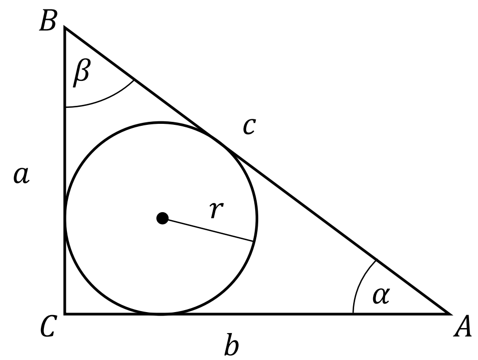
Gdy $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}$, to wtedy $\operatorname{tg}\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{1-\operatorname{tg}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}=\frac{2\cdot\frac{1}{2}}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{4}{3}$.

Gdy $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{3}$, to wtedy $\operatorname{tg}\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{1-\operatorname{tg}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}=\frac{2\cdot\frac{1}{3}}{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{3}{4}$.

Zatem długości boków trójkąta mają się jak $3:4:5$ i sinus większego z kątów ostrych trójkąta jest równy $\frac{4}{5}$.

<u>Sposób 6. (sinus podwojonego kąta)</u>

Przyjmijmy następujące oznaczenia:
a, b, c – długości boków trójkąta ABC
α, β – miary kątów ostrych trójkąta
r – promień okręgu wpisanego w trójkąt ABC. (Zobacz rysunek).



Wtedy $r = \frac{a+b-c}{2}$. Z treści zadania wynika, że $c = 5r$.
Zatem

$$c = 5 \cdot \frac{a+b-c}{2}$$

$$2c = 5a + 5b - 5c$$

$$5a + 5b = 7c$$

Ponieważ obie strony tej równości są dodatnie, więc:

$$25a^2 + 50ab + 25b^2 = 49c^2$$

$$25(a^2 + b^2) + 50ab = 49c^2$$

$$25c^2 + 50ab = 24c^2$$

$$50ab = 24c^2$$

Ponieważ $a = c \cdot \sin\alpha$ oraz $b = c \cdot \cos\alpha$, więc powyższą równość możemy zapisać w postaci

$$50 \cdot c^2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha = 24c^2$$

a zatem

$$25 \cdot \sin 2\alpha = 24$$

czyli

$$\sin 2\alpha = \frac{24}{25}$$

Korzystamy z tożsamości $\sin^2 2\alpha + \cos^2 2\alpha = 1$ i otrzymujemy

$$\cos^2 2\alpha = 1 - \left(\frac{24}{25}\right)^2 = \frac{49}{625}$$

Zatem $\cos 2\alpha = \frac{7}{25}$ lub $\cos 2\alpha = -\frac{7}{25}$. Ale $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$, więc

$$1 - 2\sin^2\alpha = \frac{7}{25} \quad \text{lub} \quad 1 - 2\sin^2\alpha = -\frac{7}{25}$$

Stąd

$$\sin^2\alpha = \frac{9}{25} \quad \text{lub} \quad \sin^2\alpha = \frac{16}{25}$$

Kąt α jest ostry, więc $\sin\alpha > 0$. Zatem otrzymujemy $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ lub $\sin\alpha = \frac{4}{5}$.
Wówczas – odpowiednio do otrzymanych wartości $\sin\alpha$ – mamy: $\cos\alpha = \frac{4}{5} = \sin\beta$ lub $\cos\alpha = \frac{3}{5} = \sin\beta$. Ponieważ kątowi ostremu o większej mierze odpowiada większa wartość sinusa, więc sinus większego z kątów ostrych trójkąta ABC jest równy $\frac{4}{5}$.

Zadanie 14. (0–6)

Wymagania egzaminacyjne 2021	
Wymaganie ogólne	**Wymagania szczegółowe**
III. Modelowanie matematyczne.	Zdający: P4.9) wyznacza wzór funkcji kwadratowej na podstawie pewnych informacji o tej funkcji lub o jej wykresie; R7.4) znajduje związki miarowe w figurach płaskich […].

Łącznie za zadanie zdający może otrzymać 6 punktów: 3 punkty za rozwiązanie podpunktu a) oraz 3 punkty za rozwiązanie podpunktu b).

Zasady oceniania dla podpunktu a)

Zdający otrzymuje .... 1 p.
gdy zapisze współrzędne punktu C w zależności od zmiennej m: $C = (m, m^2)$.

Zdający otrzymuje .... 2 p.
gdy:

- wyznaczy wysokość h_C trójkąta ABC opuszczoną z wierzchołka C w zależności od m: $h_C = \frac{|m-m^2+2|}{\sqrt{2}}$

ALBO

- wyznaczy współrzędne dwóch wektorów zaczepionych w jednym z wierzchołków trójkąta ABC, rozpinających trójkąt ABC, np. $\overrightarrow{AC} = [m, m^2 - 2]$, $\overrightarrow{AB} = [1, 1]$

ALBO

- wyznaczy długości odcinków AC i BC w zależności od zmiennej m oraz wyznaczy długość odcinka AB: $|AC| = \sqrt{m^2 + (m^2 - 2)^2}$, $|BC| = \sqrt{(m-1)^2 + (m^2 - 3)^2}$, $|AB| = \sqrt{2}$

Zdający otrzymuje .... 3 p.
gdy zastosuje poprawną metodę i zapisze wzór na pole trójkąta ABC w zależności od zmiennej m:

$$P(m) = \frac{1}{2} \cdot |m^2 - m - 2| \quad \text{dla } m \neq -1 \text{ i } m \neq 2$$

Uwagi:

1. Jeżeli zdający wyznaczy poprawny wzór funkcji $P(m)$, lecz nie poda dziedziny tej funkcji, to może za rozwiązanie podpunktu a) otrzymać **3 punkty**.
2. Jeżeli zdający przyjmuje $C = (x, x^2)$, konsekwentnie rozwiązuje podpunkt a) zadania do końca, otrzymując $P(x) = \frac{1}{2} \cdot |x^2 - x - 2|$, to może otrzymać co najwyżej **2 punkty**.

Zasady oceniania dla podpunktu b)

Zdający otrzymuje .... 1 p.
gdy:

- zauważy, że trójkąt ten jest ostrokątny wtedy i tylko wtedy, gdy punkt C leży na jednym z fragmentów M_1M_2 lub N_1N_2 paraboli

ALBO

- zapisze równania prostych prostopadłych do prostej AB przechodzących przez punkt A i B

ALBO

- zapisze, że w każdym z rozpatrywanych trójkątów ABC kąt przy wierzchołku C jest ostry i zapisze warunki na to, żeby kąty przy wierzchołkach A i B były ostre

ALBO

- zapisze warunki na to, aby kąty przy wierzchołkach A, B i C były ostre, np.:
  $\cos|\measuredangle CAB| > 0$ oraz $\cos|\measuredangle ABC| > 0$ oraz $\cos|\measuredangle ACB| > 0$
  lub
  $\cos\left|\measuredangle\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)\right| > 0$ oraz $\cos\left|\measuredangle\left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right)\right| > 0$ oraz $\cos\left|\measuredangle\left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}\right)\right| > 0$
  lub
  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} > 0$ oraz $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} > 0$ oraz $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} > 0$
  lub
  $|AB|^2 + |BC|^2 > |CA|^2$, $|BC|^2 + |CA|^2 > |AB|^2$, $|AC|^2 + |AB|^2 > |BC|^2$

Zdający otrzymuje .... 2 p.
gdy:

- wyznaczy równania prostych M_1N_1 oraz M_2N_2 oraz obliczy odcięte co najmniej dwóch punktów spośród M_1, N_1, M_2, N_2 i stwierdzi, że trójkąt ten jest ostrokątny wtedy i tylko wtedy, gdy punkt C leży na jednym z fragmentów M_1M_2 lub N_1N_2 paraboli

ALBO

- zapisze układ nierówności:

$$m^2 + (m^2 - 2)^2 + 2 - (m - 1)^2 - (m^2 - 3)^2 > 0$$

i

$$(m - 1)^2 + (m^2 - 3)^2 + 2 - m^2 - (m^2 - 2)^2 > 0$$

i

$$m^2 + (m^2 - 2)^2 + (m - 1)^2 + (m^2 - 3)^2 - 2 > 0$$

ALBO

- stwierdzi, że w każdym z rozpatrywanych trójkątów ABC kąt przy wierzchołku C jest ostry oraz zapisze układ nierówności:

$$m^2 + (m^2 - 2)^2 + 2 - (m - 1)^2 - (m^2 - 3)^2 > 0$$

i

$$(m - 1)^2 + (m^2 - 3)^2 + 2 - m^2 - (m^2 - 2)^2 > 0$$

ALBO

- zapisze układ nierówności:

$$m^2 + m - 2 > 0$$

i

$$m^4 - 4m^2 - m + 6 > 0$$

i

$$-m^2 - m + 4 > 0$$

Zdający otrzymuje .... 3 p.
gdy zastosuje poprawną metodę i wyznaczy wartości m dla których trójkąt ABC jest ostrokątny:
$m \in \left(\frac{-1-\sqrt{17}}{2},\ -2\right) \cup \left(1, \frac{-1+\sqrt{17}}{2}\right)$.

Uwaga:
Jeżeli zdający, rozwiązując część b) sposobem 1., nie stwierdzi, że kąt przy wierzchołku C jest zawsze ostry, to może otrzymać co najwyżej **2 punkty**.

Przykładowe pełne rozwiązania

a)
<u>Sposób 1.</u>
Niech C będzie dowolnym punktem leżącym na paraboli. Wtedy $C = (m, m^2)$, gdzie m jest dowolną liczbą rzeczywistą.
Długość odcinka AB jest równa $|AB| = \sqrt{(1-0)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{2}$, a prosta AB ma równanie postaci $y = x + 2$, czyli $x - y + 2 = 0$.
Wysokość h_C trójkąta ABC opuszczona z wierzchołka C jest równa odległości punktu C od prostej AB, więc ze wzoru na odległość punktu od prostej otrzymujemy

$$h_C = \frac{|m - m^2 + 2|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{|m - m^2 + 2|}{\sqrt{2}}$$

Zatem pole P trójkąta ABC jest równe

$$P = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot h_C = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{|m - m^2 + 2|}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \cdot |m - m^2 + 2|$$

dla $m \neq -1$ oraz $m \neq 2$ (gdy punkt C leży na prostej AB, a więc gdy $m - m^2 + 2 = 0$, to trójkąt ABC nie istnieje).

<u>Sposób 2.</u>
Niech C będzie dowolnym punktem leżącym na paraboli. Wtedy $C = (m, m^2)$, gdzie m jest dowolną liczbą rzeczywistą. Współrzędne wektorów $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC}$ są równe

$\overrightarrow{AB} = [1-0, 3-2] = [1, 1]$ oraz $\overrightarrow{AC} = [m-0, m^2-2] = [m, m^2-2]$

Zatem pole P trójkąta ABC jest równe

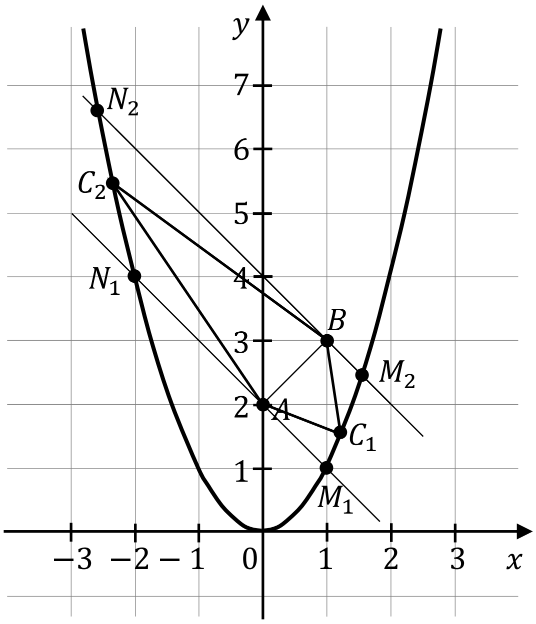
$$P(m) = \frac{1}{2} \cdot |m \cdot 1 - 1 \cdot (m^2 - 2)| = \frac{1}{2} \cdot |m^2 - m - 2|$$

dla $m \neq -1$ oraz $m \neq 2$ (gdy punkt C leży na prostej AB, a więc gdy $m - m^2 + 2 = 0$, to trójkąt ABC nie istnieje).

b)

Sposób 1.

Zauważmy, że trójkąt ABC jest ostrokątny wtedy i tylko wtedy, gdy punkt C leży na jednym z fragmentów M_1M_2 lub N_1N_2 paraboli, gdzie końce tych fragmentów to punkty przecięcia prostych prostopadłych do prostej AB, przechodzących przez punkty A i B, z parabolą (kąt przy wierzchołku C tego trójkąta zawsze będzie kątem ostrym).



Wystarczy w tym celu pokazać, że punkt C nie leży w kole, którego średnicą jest odcinek AB. Promień tego koła jest równy $r = \frac{\sqrt{2}}{2}$, a środkiem koła jest punkt $S = \left(\frac{0+1}{2}, \frac{2+3}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$, więc koło jest opisane nierównością

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{2}$$

czyli

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} \leq 0$$

Ponieważ

$$\left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(m^2 - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} = m^4 - 4m^2 - m + 6 = (m^2 - 2{,}1)^2 + 0{,}2m^2 - m + 1{,}59$$

i wyróżnik trójmianu $0{,}2m^2 - m + 1{,}59$ jest ujemny, więc

$$\left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(m^2 - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} = (m^2 - 2{,}1)^2 + 0{,}2m^2 - m + 1{,}59 > 0$$

dla każdego $m \in R$.

To oznacza, że współrzędne punktu $C = (m, m^2)$ leżącego na paraboli, nie spełniają nierówności koła, czyli C nie leży w kole, którego średnicą jest odcinek AB.

Współczynnik kierunkowy prostej AB jest równy 1, więc prosta prostopadła do AB i przechodząca przez punkt A ma równanie $y = -x + 2$, natomiast prosta prostopadła do AB i przechodząca przez punkt B ma równanie $y = -x + 4$.
Pierwsze współrzędne punktów M_1 i N_1 przecięcia prostej o równaniu $y = -x + 2$ z parabolą obliczymy, rozwiązując równanie otrzymane z przyrównania prawych stron równań $y = -x + 2$ i $y = x^2$. Otrzymujemy $x^2 = -x + 2$, więc $x_{M_1} = 1$ oraz $x_{N_1} = -2$.
Podobnie obliczymy pierwsze współrzędne punktów M_2 i N_2. Po przyrównaniu prawych stron równań $y = -x + 4$ i $y = x^2$ otrzymujemy $x^2 = -x + 4$, więc $x_{N_2} = \frac{-1-\sqrt{17}}{2}$ oraz $x_{M_2} = \frac{-1+\sqrt{17}}{2}$.
Zatem trójkąt ABC jest ostrokątny tylko wtedy, gdy $m \in \left(\frac{-1-\sqrt{17}}{2}, -2\right) \cup \left(1, \frac{-1+\sqrt{17}}{2}\right)$.

Uwagi:

1. Uzasadnienie, że punkt C nie leży w kole o średnicy AB można przeprowadzić też w następujący sposób. Promień tego koła jest równy $r = \frac{\sqrt{2}}{2}$, a środkiem tego koła jest punkt $S = \left(\frac{0+1}{2}, \frac{2+3}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$. Rozważmy kwadrat opisany na tym kole, przy czym odcinek AB łączy środki dwóch przeciwległych boków tego kwadratu. Wierzchołkami tego kwadratu są punkty $E = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$, $F = \left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$, $G = \left(\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right)$, $H = \left(-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$. Obszar ograniczony parabolą, w którym zawarty jest odcinek AB, jest opisany nierównością $y > x^2$. Ponieważ $\frac{3}{2} > \left(\frac{1}{2}\right)^2$, $\frac{5}{2} > \left(\frac{3}{2}\right)^2$, $\frac{7}{2} > \left(\frac{1}{2}\right)^2$ oraz $\frac{5}{2} > \left(-\frac{1}{2}\right)^2$, więc każdy z punktów E, F, G i H leży w tym obszarze. Obszar ten jest figurą wypukłą, więc kwadrat $EFGH$ jest zawarty w tym obszarze. Zatem koło wpisane w ten kwadrat również jest w tym obszarze zawarte. To oznacza, że żaden z punktów C nie leży w kole o środku S i średnicy AB.
2. Uzasadnienie, że wyrażenie $m^4 - 4m^2 - m + 6$ przyjmuje dla każdego $m \in R$ wartości dodatnie, można przeprowadzić też następująco. Gdy $m < 2$, to wówczas $2 - m > 0$, więc $m^4 - 4m^2 - m + 6 = (m^2 - 2)^2 + 2 - m > 0$. Dla $m \geq 2$ mamy z kolei $m^2 - 2 \geq 2$, więc
$$(m^2 - 2)^2 + 2 - m \geq 2(m^2 - 2) + 2 - m = 2m^2 - m - 2 \geq 2 \cdot 2^2 - 2 - 2 > 0.$$

Sposób 2.
Aby wyznaczyć wszystkie wartości m, dla których trójkąt ABC jest ostrokątny, wystarczy wyznaczyć te wartości m, dla których kąty CAB, ABC i ACB są ostre. Tak jest wtedy, gdy cosinusy tych kątów są dodatnie, czyli gdy

$\cos|\sphericalangle CAB| > 0$ i $\cos|\sphericalangle ABC| > 0$ i $\cos|\sphericalangle ACB| > 0$.

Stąd i z twierdzenia cosinusów otrzymujemy

$$\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}>0 \quad \text{i} \quad \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}>0 \quad \text{i} \quad \frac{b^2+a^2-c^2}{2ab}>0$$

gdzie $a^2=|BC|^2=(m-1)^2+(m^2-3)^2$, $b^2=|AC|^2=m^2+(m^2-2)^2$ oraz $c^2=|AB|^2=2$.
Zatem

$$b^2+c^2-a^2>0 \quad \text{i} \quad a^2+c^2-b^2>0 \quad \text{i} \quad b^2+a^2-c^2>0$$

Rozwiązujemy pierwszą z tych nierówności:

$$b^2+c^2-a^2>0$$

$$m^2+(m^2-2)^2+2-(m-1)^2-(m^2-3)^2>0$$

$$2m^2+2m-4>0$$

$$2(m-1)(m+2)>0$$

$$m\in(-\infty,-2)\cup(1,+\infty)$$

Rozwiązujemy drugą z nierówności:

$$a^2+c^2-b^2>0$$

$$(m-1)^2+(m^2-3)^2+2-m^2-(m^2-2)^2>0$$

$$-2m^2-2m+8>0$$

$$\Delta=(-2)^2-4\cdot(-2)\cdot 8=68$$

$$m_1=\frac{2-\sqrt{68}}{-4}=\frac{-1+\sqrt{17}}{2}, \quad m_2=\frac{2+\sqrt{68}}{-4}=\frac{-1-\sqrt{17}}{2}$$

$$m\in\left(\frac{-1-\sqrt{17}}{2},\frac{-1+\sqrt{17}}{2}\right)$$

Nierówności $b^2+c^2-a^2>0$ i $a^2+c^2-b^2>0$ są spełnione jednocześnie dla $m\in\left(\frac{-1-\sqrt{17}}{2},\ -2\right)\cup\left(1,\frac{-1+\sqrt{17}}{2}\right)$.
Przekształcamy nierówność $b^2+a^2-c^2>0$ i otrzymujemy

$$m^2+(m^2-2)^2+(m-1)^2+(m^2-3)^2-2>0$$

$$2m^4-8m^2-2m+12>0$$

$$m^4-4m^2-m+6>0$$

Wykażemy, że dla każdego $m\in\left(\frac{-1-\sqrt{17}}{2},\ -2\right)\cup\left(1,\frac{-1+\sqrt{17}}{2}\right)$ nierówność ta jest prawdziwa.
Nierówność $m^4-4m^2-m+6>0$ możemy zapisać w postaci

$$(m^2-2)^2+2-m>0$$

Dla $m < 2$ nierówność jest prawdziwa, gdyż lewa strona nierówności jest dodatnia. Ponieważ $\frac{-1+\sqrt{17}}{2} < \frac{-1+5}{2} = 2$, więc dla każdego $m \in \left(\frac{-1-\sqrt{17}}{2},\ -2\right) \cup \left(1, \frac{-1+\sqrt{17}}{2}\right)$ nierówność $m^4 - 4m^2 - m + 6 > 0$ jest prawdziwa.

Stąd trójkąt ABC jest ostrokątny tylko dla $m \in \left(\frac{-1-\sqrt{17}}{2},\ -2\right) \cup \left(1, \frac{-1+\sqrt{17}}{2}\right)$.

Zadanie 15. (0–7)

Wymagania egzaminacyjne 2021	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
III. Modelowanie matematyczne.	Zdający: R11.6) stosuje pochodne do rozwiązywania zagadnień optymalizacyjnych.

Zasady oceniania

Rozwiązanie zadania optymalizacyjnego składa się z trzech etapów:
- zbudowanie modelu opisującego sytuację podaną w zadaniu
- zbadanie modelu i jego własności
- przeprowadzenie końcowych obliczeń.

Pierwszy etap składa się z trzech kroków.
Krok pierwszy: przyjęcie jednego z wymiarów zbiornika (x – długość krawędzi podstawy zbiornika, h – wysokość zbiornika) za zmienną badanej funkcji i obliczenie drugiego wymiaru zbiornika:

$$h = \frac{144}{x^2}$$

lub

$$x = \sqrt{\frac{144}{h}}$$

Krok drugi: zapisanie funkcji kosztu wykonania f zbiornika za pomocą jednej zmiennej:

$$f(x) = 100x^2 + 4x \cdot \frac{144}{x^2} \cdot 75$$

lub

$$f(h) = 100 \cdot \frac{144}{h} + 4 \cdot \sqrt{\frac{144}{h}} \cdot h \cdot 75$$

Krok trzeci: ustalenie dziedziny funkcji f: $D_x = [4, 9]$ lub $D_h = \left[\frac{16}{9}, 9\right]$.

Drugi etap składa się z trzech kroków.
Krok pierwszy: wyznaczenie pochodnej funkcji f:

$$f'(x) = 200x - \frac{43200}{x^2} = 200\left(x - \frac{216}{x^2}\right)$$

lub

$$f'(h) = -\frac{14400}{h^2} + \frac{1800}{\sqrt{h}}$$

Krok drugi: zastosowanie warunku koniecznego istnienia ekstremum funkcji f – obliczenie miejsc zerowych pochodnej: $x = 6$ (lub $h = 4$)

Krok trzeci: zbadanie znaku pochodnej funkcji f:
$f'(x) > 0$ dla $x \in (6, 9)$,
$f'(x) < 0$ dla $x \in (4, 6)$

lub

$f'(h) > 0$ dla $h \in (4, 9)$,
$f'(h) < 0$ dla $h \in \left(\frac{16}{9}, 4\right)$
oraz wyznaczenie (z uzasadnieniem) wartości zmiennej x (lub zmiennej h), dla której funkcja f przyjmuje wartość najmniejszą, np.:
funkcja f zmiennej x (określona na przedziale $[4, 9]$) jest malejąca w przedziale $[4,\ 6]$ oraz rosnąca w przedziale $[6, 9]$, więc w punkcie $x = 6$ funkcja f osiąga najmniejszą wartość.

LUB

funkcja f zmiennej h (określona na przedziale $\left[\frac{16}{9}, 9\right]$)jest malejąca w przedziale $\left[\frac{16}{9}, 4\right]$ oraz rosnąca w przedziale $[4, 9]$, więc w punkcie $h = 4$ funkcja f osiąga najmniejszą wartość.

Za poprawne wykonanie każdego z tych kroków zdający otrzymuje **1 punkt**, o ile poprzednie kroki też były wykonane poprawnie.

Etap trzeci polega na obliczeniu wymiarów zbiornika, przy których koszt wykonania zbiornika jest najmniejszy:
$x = 6,\ h = 4$.

Za poprawne wykonanie trzeciego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**.

Uwagi:
1. Badanie znaku pochodnej zdający może opisać w inny sposób, np. szkicując wykres funkcji, która w ten sam sposób jak pochodna zmienia znak.

2. Za poprawne uzasadnienie, że rozważana funkcja posiada wartość najmniejszą dla wyznaczonej wartości x (czy też h), przy której pochodna się zeruje, można uznać sytuacje, gdy zdający:
   a) opisuje słownie lub graficznie (np. przy użyciu strzałek) monotoniczność funkcji f;
   LUB
   b) zapisuje, że dla wyznaczonej wartości x (czy też h) funkcja f ma minimum lokalne i jest to jednocześnie jej najmniejsza wartość.

   Jeżeli zdający nie przedstawi takiego uzasadnienia, to za II etap może otrzymać co najwyżej **2 punkty**.
3. Jeżeli zdający wyznacza metodą prób i błędów wymiary zbiornika, przy których koszt wykonania zbiornika będzie najmniejszy, to otrzymuje **0 punktów** za II i III etap..
4. Jeżeli zdający rozpatruje funkcję kosztów postaci $f(x) = ax^2 + \frac{b}{x}$ (gdzie $a > 0,\ b > 0$), nie uwzględniając wszystkich ścian bocznych lub uwzględniając dwie podstawy, to może otrzymać co najwyżej **5 punktów** za całe rozwiązanie (nie otrzymuje punktów za drugi krok pierwszego etapu oraz za trzeci etap).
5. Jeżeli zdający rozpatruje funkcję pola zamiast funkcji kosztów, to może otrzymać co najwyżej **5 punktów** za całe rozwiązanie (nie otrzymuje punktów za drugi krok pierwszego etapu oraz za trzeci etap). Jeżeli zdający rozpatruje funkcję pola postaci $f(x) = ax^2 + \frac{b}{x}$ (gdzie $a > 0,\ b > 0$), <u>nie uwzględniając</u> wszystkich ścian bocznych lub uwzględniając dwie podstawy, to może otrzymać co najwyżej **4 punkty** za całe rozwiązanie (nie otrzymuje punktów za drugi krok pierwszego etapu, trzeci krok drugiego etapu oraz za trzeci etap).
6. Jeżeli zdający uzasadnia istnienie najmniejszej wartości funkcji kosztów w zbiorze $R\setminus\{0\}$, to nie otrzymuje punktu za trzeci krok drugiego etapu.

Przykładowe pełne rozwiązania

<u>Sposób 1.</u>
Przyjmujemy następujące oznaczenia:
x– długość krawędzi podstawy zbiornika (w metrach),
h – wysokość zbiornika (w metrach).

Pojemność zbiornika ma wynosić 144 m^3, więc $144 = x^2 \cdot h$. Stąd $h = \frac{144}{x^2}$.
Koszt f wykonania zbiornika jest równy $f = 100x^2 + 75 \cdot 4xh$, więc

$$f(x) = 100x^2 + 4x \cdot \frac{144}{x^2} \cdot 75,$$

gdzie $x \in [4, 9]$.
Obliczamy pochodną funkcji f:

$$f'(x) = 200x - \frac{43200}{x^2}$$

Miejscem zerowym pochodnej funkcji f jest $x = 6$.
Badamy monotoniczność funkcji f:

$f'(x) > 0$ dla $x \in (6, 9)$,

$f'(x) < 0$ dla $x \in (4, 6)$.

Zatem
funkcja f jest malejąca w przedziale $x \in [4, 6]$,
funkcja f jest rosnąca w przedziale $x \in [6, 9]$.

Stąd funkcja f przyjmuje najmniejszą wartość dla argumentu 6. Wtedy $h = 4$.

Wymiary zbiornika dla którego koszt wykonania jest najmniejszy: 6 m x 6 m x 4 m.

<u>Sposób 2.</u>
Przyjmujemy następujące oznaczenia:
x – długość krawędzi podstawy zbiornika (w metrach),
h – wysokość zbiornika (w metrach).

Pojemność zbiornika ma wynosić 144 m^3, więc $144 = x^2 \cdot h$. Stąd $x = \sqrt{\frac{144}{h}}$.
Koszt f wykonania zbiornika jest równy $f = 100x^2 + 75 \cdot 4xh$, więc

$$f(h) = 100 \cdot \frac{144}{h} + 4h \cdot \sqrt{\frac{144}{h}} \cdot 75,$$

gdzie $h \in \left[\frac{16}{9}, 9\right]$.
Obliczamy pochodną funkcji f:

$$f'(h) = -\frac{14400}{h^2} + \frac{3600}{2\sqrt{h}} = -\frac{14400}{h^2} + \frac{1800}{\sqrt{h}}$$

Miejscem zerowym pochodnej funkcji f jest $h = 4$.

Badamy monotoniczność funkcji f:

$f'(h) > 0$ dla $h \in (4, 9)$,

$f'(h) < 0$ dla $h \in \left(\frac{16}{9}, 4\right)$.

Zatem
funkcja f jest malejąca w przedziale $h \in \left[\frac{16}{9}, 4\right]$,
funkcja f jest rosnąca w przedziale $h \in [4, 9]$.

Stąd funkcja f przyjmuje najmniejszą wartość dla argumentu $h = 4$. Wtedy $x = 6$.

Wymiary zbiornika, dla których koszt wykonania jest najmniejszy: 6 m x 6 m x 4 m.

Uwaga:
Zdający może rozwiązywać zadanie sposobem – za pomocą nierówności między średnią arytmetyczną i geometryczną, np.:

$$f(x) = 100x^2 + 4x \cdot \frac{144}{x^2} \cdot 75 = 100x^2 + \frac{43200}{x}$$

$$f(x) = 100\left(x^2 + \frac{432}{x}\right) = 100\left(x^2 + \frac{216}{x} + \frac{216}{x}\right)$$

$$\frac{x^2 + \frac{216}{x} + \frac{216}{x}}{3} \geq \sqrt[3]{x^2 \cdot \frac{216}{x} \cdot \frac{216}{x}} = \sqrt[3]{6^3 \cdot 6^3} = 36$$

Stąd $f(x) \geq 100 \cdot 3 \cdot 36$ i funkcja $f(x)$ osiąga wartość najmniejszą, gdy $x^2 = \frac{216}{x}$, tj. dla $x = 6$. Wtedy $h = 4$.