Przykładowe zadania
z matematyki
na poziomie podstawowym i rozszerzonym
wraz z rozwiązaniami

Egzamin maturalny z matematyki, jako przedmiotu obowiązkowego, jest zdawany na poziomie podstawowym. Jeśli matematyka została wybrana jako przedmiot dodatkowy, egzamin jest zdawany również na poziomie rozszerzonym. Zadania egzaminacyjne z matematyki mogą na obu poziomach mieć formę zamkniętą lub otwartą.

Opis arkusza dla poziomu podstawowego

Arkusz egzaminacyjny składa się z trzech grup zadań.

I grupa zawiera zadania zamknięte. Dla każdego z tych zadań są podane cztery odpowiedzi, z których tylko jedna jest poprawna. Każde zadanie z tej grupy jest punktowane w skali 0-1. Zdający wskazuje właściwą odpowiedź, wpisując swoją decyzję na karcie odpowiedzi.

II grupa zawiera zadania otwarte krótkiej odpowiedzi. Zdający podaje krótkie uzasadnienie swojej odpowiedzi. Zadania z tej grupy punktowane są w skali 0-2.

III grupa zawiera zadania otwarte rozszerzonej odpowiedzi. Zadania te wymagają starannego zaplanowania strategii rozwiązania oraz przedstawienia sposobu rozumowania i są punktowane w skali 0-4, 0-5 albo 0-6.

Opis arkusza dla poziomu rozszerzonego

Arkusz egzaminacyjny składa się z trzech grup zadań.

I grupa zawiera zadania zamknięte. Dla każdego z tych zadań zdający wskazuje właściwą odpowiedź, zaznaczając swoją decyzję na karcie odpowiedzi. Zadania punktowane są w skali 0-1.

II grupa zawiera zadania otwarte krótkiej odpowiedzi, w tym zadania z kodowaną odpowiedzią. Zadania te punktowane są w skali 0-2, 0-3 albo 0-4.
W zadaniach z kodowaną odpowiedzią zdający udziela odpowiedzi wpisując żądane cyfry otrzymanego wyniku do odpowiedniej tabeli. Ocenie podlega tylko zakodowana odpowiedź.

III grupa zawiera zadania otwarte rozszerzonej odpowiedzi. Rozwiązując zadania z tej grupy, zdający w szczególności ma wykazać się umiejętnością rozumowania oraz dobierania własnych strategii matematycznych do nietypowych warunków. Zadania te punktowane są w skali 0-5, 0-6 albo 0-7.

Podstawowe zasady oceniania rozwiązań zadań otwartych

W zadaniach krótkiej odpowiedzi zdający otrzymuje 1 lub 2 punkty za rozwiązanie, którego nie doprowadził do końca lub w którym popełnił pewne błędy. Określony jest jednak minimalny postęp, który w tym rozwiązaniu musi być osiągnięty, by otrzymać 1 punkt, oraz określone jest, jak zaawansowane powinno być rozwiązanie, by można było je ocenić na 2 punkty.

W rozwiązaniach zadań rozszerzonej odpowiedzi zostaje wyróżniona najważniejsza faza, nazywana pokonaniem zasadniczych trudności zadania. Przyjęto zasadę, że za pokonanie zasadniczych trudności zadania przyznaje się co najmniej połowę punktów, jakie zdający otrzymałby za bezbłędne rozwiązanie tego zadania. Tak więc w zadaniu za 4 punkty, za pokonanie zasadniczych trudności, przyznajemy 2 lub 3 punkty (zależnie od zadania). W zadaniu za 5 punktów za tę fazę na ogół przyznajemy 3 punkty. W zadaniach za 6 punktów - na ogół 3 lub 4 punkty. Wyróżnienie w rozwiązaniu zadania rozszerzonej odpowiedzi fazy pokonania zasadniczych trudności zadania powoduje następnie wyróżnienie kilku innych faz. Przed pokonaniem zasadniczych trudności zadania wyróżniamy jeszcze jedną lub dwie fazy je poprzedzające: dokonanie niewielkiego postępu, który jednak jest konieczny dla rozwiązania zadania oraz dokonanie istotnego postępu w rozwiązaniu zadania. Zdający, który pokonał zasadnicze trudności zadania, mógł na tym poprzestać lub mógł kontynuować rozwiązanie. Wyróżniamy ważną kategorię rozwiązań, w których zdający pokonał zasadnicze trudności zadania i kontynuował rozwiązanie do końca, jednak w rozwiązaniu popełnił błędy niewpływające na poprawność całego rozumowania (na przykład nieistotne dla całego rozumowania błędy rachunkowe lub niektóre błędy nieuwagi). Analogicznie wyróżniamy kategorię pokonania zasadniczych trudności z nieistotnymi błędami. W każdym przypadku określana jest liczba punktów przyznawana za rozwiązania w każdej (lub niektórych) z powyższych kategorii. Należy podkreślić, że schemat oceniania rozwiązania zadania jest traktowany jako integralna część zadania; na ogół ten schemat oceniania uwzględnia wszystkie typowe sposoby rozwiązania i czasami również niektóre nietypowe.

Zatem w zadaniu za 3 punkty:
1. rozwiązanie, w którym nie ma istotnego postępu (0 pkt)
2. rozwiązanie, w którym jest istotny postęp, ale nie zostały pokonane zasadnicze trudności zadania (1 pkt)
3. zostały pokonane zasadnicze trudności zadania, ale zadanie nie zostało rozwiązane bezbłędnie (2 pkt)
4. zadanie zostało rozwiązane bezbłędnie (3 pkt)

Natomiast w zadaniu za 4 punkty:
1. rozwiązanie, w którym nie ma istotnego postępu (0 pkt)
2. został dokonany istotny postęp w rozwiązaniu zadania, ale nie zostały pokonane zasadnicze trudności zadania lub zostały pokonane zasadnicze trudności zadania, lub w trakcie pokonywania zasadniczych trudności zadania zostały popełnione błędy, usterki (1 pkt)
3. zostały pokonane zasadnicze trudności zadania i zdający na tym poprzestał lub błędnie kontynuował rozwiązanie (2 pkt)
4. zostały pokonane zasadnicze trudności zadania, zdający doprowadził rozwiązanie do końca, ale rozwiązanie zadania zawiera błędy, usterki (3 pkt)
5. zadanie zostało rozwiązane bezbłędnie (4 pkt)

Poniżej zamieszczone zostały przykładowe sposoby przydziału punktów za poszczególne fazy rozwiązania zadań rozszerzonej odpowiedzi.

Najprostszy podział punktów za rozwiązanie zadania za 5 punktów wygląda następująco:
1. rozwiązanie, w którym nie ma istotnego postępu (0 pkt)
2. został dokonany istotny postęp w rozwiązaniu zadania, ale nie zostały pokonane zasadnicze trudności zadania (1 pkt)
3. zostały pokonane zasadnicze trudności zadania, ale w trakcie ich pokonywania zostały popełnione błędy, usterki (2 pkt)
4. zasadnicze trudności zadania zostały pokonane bezbłędnie i zdający na tym poprzestał lub błędnie kontynuował rozwiązanie (3 pkt)
5. zostały pokonane zasadnicze trudności zadania, zdający doprowadził rozwiązanie do końca, jednak rozwiązanie zadania zawiera usterki (błędy rachunkowe, zgubienie rozwiązań, brak wyboru właściwych rozwiązań itp.) (4 pkt)
6. zadanie zostało rozwiązane bezbłędnie (5 pkt)

A oto inny przydział punktów w zadaniu za 5 punktów :

1. rozwiązanie, w którym nie ma istotnego postępu (0 pkt)
2. rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania (1 pkt)
3. został dokonany istotny postęp w rozwiązaniu zadania, ale nie zostały pokonane zasadnicze trudności zadania lub zostały pokonane zasadnicze trudności zadania, rozwiązanie zadania nie zostało doprowadzone do końca, ale w trakcie pokonywania zasadniczych trudności zadania zostały popełnione błędy, usterki (2 pkt)
4. zasadnicze trudności zadania zostały pokonane bezbłędnie i zdający na tym poprzestał lub błędnie kontynuował rozwiązanie (3 pkt)
5. zostały pokonane zasadnicze trudności zadania, zdający doprowadził rozwiązanie do końca, jednak rozwiązanie zadania zawiera usterki (błędy rachunkowe, zgubienie rozwiązań, brak wyboru właściwych rozwiązań itp.) (4 pkt)
6. zadanie zostało rozwiązane bezbłędnie (5 pkt)

Przykładowy sposób przydziału punktów w zadaniu za 6 punktów:

1. rozwiązanie, w którym nie ma istotnego postępu (0 pkt)
2. rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania (1 pkt)
3. został dokonany istotny postęp w rozwiązaniu zadania, ale nie zostały pokonane zasadnicze trudności zadania (2 pkt)
4. zostały pokonane zasadnicze trudności zadania, rozwiązanie zadania nie zostało doprowadzone do końca, ale w trakcie pokonywania zasadniczych trudności zadania zostały popełnione błędy, usterki (3 pkt)
5. zasadnicze trudności zadania zostały pokonane bezbłędnie i zdający na tym poprzestał lub błędnie kontynuował rozwiązanie (4 pkt)
6. zostały pokonane zasadnicze trudności zadania, zdający doprowadził rozwiązanie do końca, jednak rozwiązanie zadania zawiera usterki (błędy rachunkowe, zgubienie rozwiązań, brak wyboru właściwych rozwiązań itp.) (5 pkt)
7. zadanie zostało rozwiązane bezbłędnie (6 pkt)

Celem pełniejszego zilustrowania sposobu oceniania zadań otwartych, na następnych stronach zamieszczone zostały przykłady zadań wraz z rozwiązaniami, opisem sposobu przyznawania punktów i uwagami, które mogą być przydatne w głębszym zrozumieniu przedstawionych powyżej reguł oceniania.

Przykładowe zadania
na poziomie podstawowym
z rozwiązaniami

Zadanie 1. (0-1)

Liczba $3^{\frac{8}{3}} \cdot \sqrt[3]{9^2}$ jest równa

A. 3^3

B. $3^{\frac{32}{9}}$

C. 3^4

D. 3^5

Rozwiązanie C

Zadanie 2. (0-1)

Liczba $\log 24$ jest równa

A. $2\log 2 + \log 20$

B. $\log 6 + 2\log 2$

C. $2\log 6 - \log 12$

D. $\log 30 - \log 6$

Rozwiązanie B

Zadanie 3. (0-1)

Rozwiązaniem równania $\frac{x-3}{2-x} = \frac{1}{2}$ jest liczba

A. $-\frac{4}{3}$

B. $-\frac{3}{4}$

C. $\frac{3}{8}$

D. $\frac{8}{3}$

Rozwiązanie D

Zadanie 4. (0-1)

Mniejszą z dwóch liczb spełniających równanie $x^2+5x+6=0$ jest
A. -6
B. -3
C. -2
D. -1

Rozwiązanie B

Zadanie 5. (0-1)

Zbiorem rozwiązań nierówności $x^2 \geq 5$ jest
A. $\left(-\infty,-\sqrt{5}\right)\cup\left(\sqrt{5},+\infty\right)$
B. $\left(-\infty,-\sqrt{5}\right\rangle\cup\left\langle\sqrt{5},+\infty\right)$
C. $\left\langle\sqrt{5},+\infty\right)$
D. $\left\langle 5,+\infty\right)$

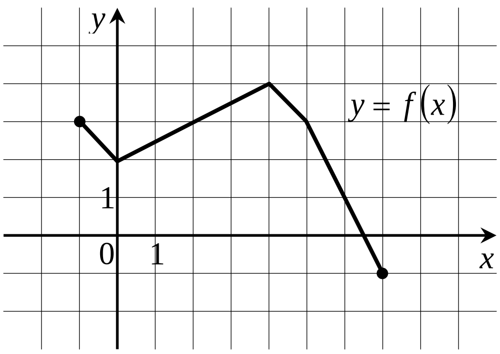
Rozwiązanie B

Zadanie 6. (0-1)

Liczba 1 jest miejscem zerowym funkcji liniowej $f(x)=(2-m)x+1$. Wynika stąd, że
A. $m=0$
B. $m=1$
C. $m=2$
D. $m=3$

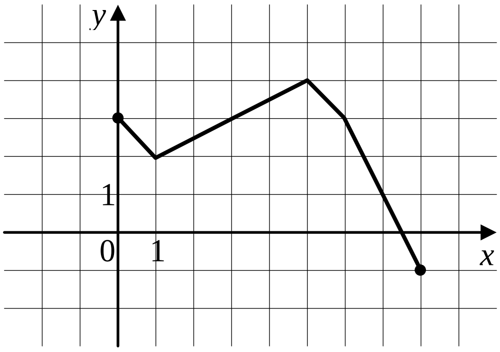
Rozwiązanie D

Zadanie 7. (0-1)
Rysunek przedstawia wykres funkcji $y=f(x)$.

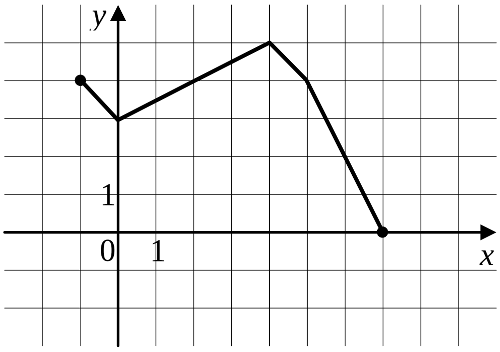


Wskaż rysunek, na którym jest przedstawiony wykres funkcji $y = f(x+1)$.

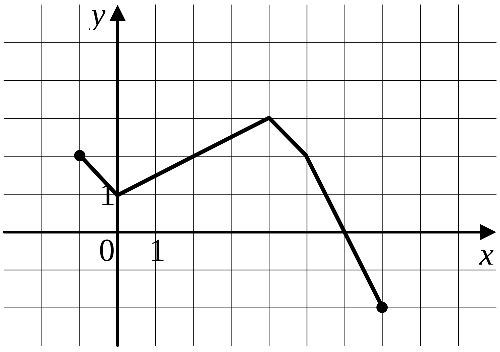
A.



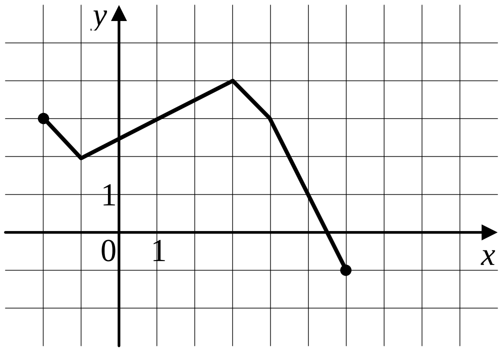
B.



C.



D.



Rozwiązanie D

Zadanie 8. (0-1)

Wskaż równanie osi symetrii paraboli określonej równaniem $y = -x^2 + 4x - 11$.

A. $x = -4$
B. $x = -2$
C. $x = 2$
D. $x = 4$

Rozwiązanie C

Zadanie 9. (0-1)

Prosta o równaniu $y = a$ ma dokładnie jeden punkt wspólny z wykresem funkcji kwadratowej $f(x) = -x^2 + 6x - 10$. Wynika stąd, że

A. $a = 3$
B. $a = 0$
C. $a = -1$
D. $a = -3$

Rozwiązanie C

Zadanie 10. (0-1)

Jaka jest najmniejsza wartość funkcji kwadratowej $f(x) = x^2 + 4x - 3$ w przedziale $\langle 0,3 \rangle$?

A. -7
B. -4
C. -3
D. -2

Rozwiązanie C

Zadanie 11. (0-1)

Które z równań opisuje prostą prostopadłą do prostej o równaniu $y = 4x + 5$?

A. $y = -4x + 3$
B. $y = -\frac{1}{4}x + 3$
C. $y = \frac{1}{4}x + 3$
D. $y = 4x + 3$

Rozwiązanie B

Zadanie 12. (0-1)

Punkty $A = (-1,3)$ i $C = (7,9)$ są przeciwległymi wierzchołkami prostokąta ABCD. Promień okręgu opisanego na tym prostokącie jest równy

A. 10
B. $6\sqrt{2}$
C. 5
D. $3\sqrt{2}$

Rozwiązanie C

Zadanie 13. (0-1)

Kąt α jest ostry i $\sin\alpha = \frac{1}{4}$. Wówczas

A. $\cos\alpha < \frac{3}{4}$
B. $\cos\alpha = \frac{3}{4}$
C. $\cos\alpha = \frac{\sqrt{13}}{4}$
D. $\cos\alpha > \frac{\sqrt{13}}{4}$

Rozwiązanie D

Zadanie 14. (0-1)

Kąt α jest ostry i $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}$. Jaki warunek spełnia kąt α ?

A. $\alpha < 30^\circ$

B. $\alpha = 30^\circ$

C. $\alpha = 60^\circ$

D. $\alpha > 60^\circ$

Rozwiązanie A

Zadanie 15. (0-1)

Kąt środkowy i kąt wpisany w okrąg są oparte na tym samym łuku. Suma ich miar jest równa 180°. Jaka jest miara kąta środkowego?

A. 60°

B. 90°

C. 120°

D. 135°

Rozwiązanie C

Zadanie 16. (0-1)

Ciąg (a_n) jest określony wzorem $a_n = (-3)^n \cdot (9 - n^2)$ dla $n \geq 1$. Wynika stąd, że

A. $a_3 = -81$

B. $a_3 = -27$

C. $a_3 = 0$

D. $a_3 > 0$

Rozwiązanie C

Zadanie 17. (0-1)

Liczby $x-1$, 4 i 8 (w podanej kolejności) są pierwszym, drugim i trzecim wyrazem ciągu arytmetycznego. Wówczas liczba x jest równa

A. 3

B. 1

C. -1

D. -7

Rozwiązanie B

Zadanie 18. (0-1)

Liczby -8, 4 i $x+1$ (w podanej kolejności) są pierwszym, drugim i trzecim wyrazem ciągu geometrycznego. Wówczas liczba x jest równa

A. -3
B. $-1{,}5$
C. 1
D. 15

Rozwiązanie A

Zadanie 19. (0-1)

Wszystkich liczb naturalnych dwucyfrowych, które są podzielne przez 6 lub przez 10, jest

A. 25
B. 24
C. 21
D. 20

Rozwiązanie C

Zadanie 20. (0-1)

Liczba wszystkich sposobów, na jakie Ala i Bartek mogą usiąść na dwóch spośród pięciu miejsc w kinie, jest równa

A. 25
B. 20
C. 15
D. 12

Rozwiązanie B

Zadanie 21. (0-2)

Rozwiąż równanie $\frac{2-3x}{1-2x}=-\frac{1}{2}$.

Rozwiązanie

Lewa strona równania jest określona dla $x \neq \frac{1}{2}$. Przenosimy wszystko na lewą stronę i sprowadzamy ułamki do wspólnego mianownika:

$$\frac{2-3x}{1-2x}+\frac{1}{2}=0, \qquad \frac{2(2-3x)+(1-2x)}{2(1-2x)}=0, \qquad \frac{5-8x}{2(1-2x)}=0.$$

Stąd otrzymujemy $5-8x=0$, czyli $x=\frac{5}{8}$. Dla tej wartości x obie strony równania są określone, więc liczba $x=\frac{5}{8}$ jest szukanym rozwiązaniem równania.

Zadanie 22. (0-2)

Rozwiąż nierówność $x^2 + 6x - 7 \leq 0$.

Rozwiązanie
Korzystając ze wzorów na pierwiastki równania kwadratowego lub dostrzegając rozkład na czynniki $x^2 + 6x - 7 = (x+7)(x-1)$, otrzymujemy dwa pierwiastki trójmianu kwadratowego: $x_1 = -7$, $x_2 = 1$. Ponieważ parabola o równaniu $y = x^2 + 6x - 7$ ma ramiona skierowane do góry, leży ona poniżej osi Ox między swoimi miejscami zerowymi. Zatem rozwiązaniem nierówności jest przedział domknięty $\langle -7, 1 \rangle$.

Zadanie 23. (0-2)

Oblicz najmniejszą wartość funkcji kwadratowej $f(x) = x^2 - 6x + 1$ w przedziale $\langle 0,1 \rangle$.

Rozwiązanie
Wyznaczmy współrzędne wierzchołka paraboli o równaniu $y = x^2 - 6x + 1$. Mamy $x_w = -\frac{b}{2a} = 3$, $y_w = -\frac{\Delta}{4a} = -8$. Ponieważ parabola ma ramiona skierowane do góry, to w przedziale $(-\infty, 3\rangle$ dana funkcja maleje. Zatem maleje także na zawartym w nim przedziale $\langle 0,1 \rangle$. Wobec tego najmniejszą wartość przyjmie ona w prawym końcu, czyli dla $x = 1$. Tą wartością jest $y = 1^2 - 6 \cdot 1 + 1 = -4$.

Zadanie 24. (0-2)

O funkcji liniowej f wiadomo, że $f(1) = 2$ oraz że do wykresu tej funkcji należy punkt $P = (-2, 3)$. Wyznacz wzór funkcji f.

Rozwiązanie
Funkcja f jest liniowa, więc jej wzór możemy zapisać w postaci: $f(x) = ax + b$. Z warunku $f(1) = 2$ wynika, że $2 = a + b$. Skoro punkt P należy do jej wykresu, to mamy także $3 = f(-2) = -2a + b$. Rozwiązujemy otrzymany układ równań i otrzymujemy $a = -\frac{1}{3}$, $b = \frac{7}{3}$. Zatem szukany wzór ma postać $f(x) = -\frac{1}{3}x + \frac{7}{3}$.

Zadanie 25. (0-2)

Napisz równanie prostej równoległej do prostej o równaniu $y = 2x - 11$ i przechodzącej przez punkt $P = (1, 2)$.

Rozwiązanie
Wszystkie proste równoległe do danej prostej mają taki sam współczynnik kierunkowy.

Szukamy zatem prostej o równaniu postaci $y = 2x + b$. Ponieważ szukana prosta przechodzi przez punkt $P = (1, 2)$, otrzymujemy $2 = 2 \cdot 1 + b$, skąd $b = 0$. Zatem prosta ta ma równanie $y = 2x$.

Zadanie 26. (0-2)

Wyznacz równanie prostej zawierającej środkową CD trójkąta ABC, którego wierzchołkami są punkty: $A = (-2, -1)$, $B = (6,1)$, $C = (7,10)$.

Rozwiązanie

Wiemy, że szukana prosta przechodzi przez punkt $C = (7,10)$ oraz przez punkt D, będący środkiem boku AB. Zatem korzystając ze wzoru na współrzędne środka odcinka mamy $D = \left(\frac{-2+6}{2}, \frac{-1+1}{2} \right) = (2,0)$. Ze wzoru na równanie prostej przechodzącej przez dwa dane punkty otrzymujemy: $(y-10)(2-7)-(0-10)(x-7)=0$, a stąd $-5y+10x-20=0$, czyli $-y+2x-4=0$.

Zadanie 27. (0-2)

W trójkącie prostokątnym, w którym przyprostokątne mają długości 2 i 4, jeden z kątów ostrych ma miarę α. Oblicz $\sin\alpha \cdot \cos\alpha$.

Rozwiązanie

Niech α będzie kątem leżącym naprzeciwko boku o długości 2, zaś β – kątem leżącym naprzeciwko boku o długości 4. Zauważmy, że $\sin\alpha = \cos\beta$ oraz $\cos\alpha = \sin\beta$, więc mamy $\sin\alpha \cdot \cos\alpha = \sin\beta \cdot \cos\beta$, czyli szukana wartość nie zależy od wyboru kąta.

Przeciwprostokątna w danym trójkącie ma długość $\sqrt{2^2+4^2} = \sqrt{20}$. Z definicji funkcji trygonometrycznych otrzymujemy $\sin\alpha\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{20}} \cdot \frac{4}{\sqrt{20}} = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$.

Zadanie 28. (0-2)

Kąt α jest ostry i $\sin\alpha = \frac{1}{4}$. Oblicz $3 + 2\,\mathrm{tg}^2\alpha$.

Rozwiązanie

Mamy $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, więc $\mathrm{tg}^2\alpha = \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{\sin^2\alpha}{1-\sin^2\alpha} = \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^2}{1-\left(\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{1}{15}$.

Zatem $3 + 2\,\mathrm{tg}^2\alpha = 3 + \frac{2}{15} = \frac{47}{15}$.

Zadanie 29. (0-2)

Ile wyrazów ujemnych ma ciąg (a_n) określony wzorem $a_n = n^2 - 2n - 24$ dla $n \geq 1$?

Rozwiązanie
Szukamy liczb naturalnych $n \geq 1$ spełniających nierówność $n^2 - 2n - 24 < 0$.
Zapiszmy tę nierówność w postaci $n^2 - 2n + 1 - 25 < 0$, $(n-1)^2 - 5^2 < 0$, skąd $(n-1-5)(n-1+5) < 0,$ $(n-6)(n+4) < 0$. Ponieważ $n+4 > 0$, otrzymujemy $n < 6$. Zatem liczba n może przyjmować jedną z pięciu wartości: 1, 2, 3, 4, 5, czyli ciąg ma pięć wyrazów ujemnych.

Zadanie 30. (0-2)

Liczby 2, $x-3$, 8 są w podanej kolejności pierwszym, drugim i czwartym wyrazem ciągu arytmetycznego. Oblicz x.

Rozwiązanie
Mamy $a_1 = 2$ oraz $a_2 = x-3$, zatem różnica ciągu wynosi $r = (x-3)-2 = x-5$. Ponadto $8 = a_4 = a_1 + 3r = 2 + 3(x-5)$, skąd $6 = 3(x-5)$ i w końcu $x = 7$.

Zadanie 31. (0-2)

Wyrazami ciągu arytmetycznego (a_n) są kolejne liczby naturalne, które przy dzieleniu przez 5 dają resztę 2. Ponadto $a_3 = 12$. Oblicz a_{15}.

Rozwiązanie
Ponieważ dokładnie co piąta liczba naturalna daje z dzielenia przez 5 resztę 2, to różnica danego ciągu arytmetycznego wynosi 5. Wobec tego $12 = a_3 = a_1 + 2r = a_1 + 10$, skąd $a_1 = 2$. Wobec tego $a_{15} = a_1 + 14r = 2 + 14 \cdot 5 = 72$.

Zadanie 32. (0-2)

Dany jest prostokąt o bokach a i b. Zmniejszamy długość boku a o 10% oraz zwiększamy długość boku b o 20%. Wyznacz stosunek $\frac{a}{b}$, jeśli wiadomo, że otrzymany prostokąt ma taki sam obwód jak prostokąt wyjściowy.

Rozwiązanie
Otrzymany prostokąt ma boki długości $0,9a$ oraz $1,2b$. Z porównania obwodów obu prostokątów otrzymujemy związek $2 \cdot 0,9a + 2 \cdot 1,2b = 2a + 2b$, skąd $0,4b = 0,2a$. Wobec tego $\frac{a}{b} = \frac{0,4}{0,2} = 2$.

Zadanie 33. (0-2)

Udowodnij, że jeśli x, y są liczbami rzeczywistymi, to $x^2 + y^2 \geq 2xy$.

Rozwiązanie

Zauważmy, że dla dowolnych liczb x, y mamy $(x-y)^2 \geq 0$, skąd $x^2 + y^2 \geq 2xy$, co kończy dowód.

Zadanie 34. (0-2)

Rzucamy dwa razy symetryczną sześcienną kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania iloczynu liczby oczek równego 5.

Rozwiązanie

Zdarzeniami elementarnymi są pary liczb całkowitych (a,b), gdzie $1 \leq a,b \leq 6$ – mamy 36 takich par. Zdarzenia elementarne sprzyjające to pary $(1,5)$ oraz $(5,1)$. Zatem szukane prawdopodobieństwo jest równe $\frac{2}{36} = \frac{1}{18}$.

Zadanie 35. (0-4)

W ciągu arytmetycznym (a_n) dane są wyrazy: $a_3 = 4,\ a_6 = 19$. Ile wyrazów tego ciągu należy do przedziału $(0, 200)$?

Rozwiązanie

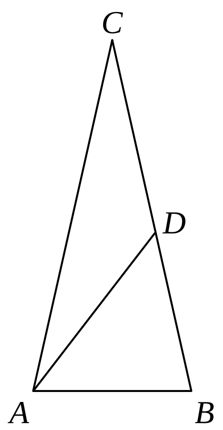
Mamy $4 = a_1 + 2r$, $19 = a_1 + 5r$. Stąd $3r = 15,\ r = 5$ oraz $a_1 = -6$. Pytamy, dla jakich n mamy $0 < a_n < 200$, czyli $0 < -6 + (n-1)\cdot 5 < 200$.

Stąd $6 < 5(n-1) < 206,\quad \frac{6}{5} < n-1 < \frac{206}{5},\quad \frac{11}{5} < n < \frac{211}{5}.$

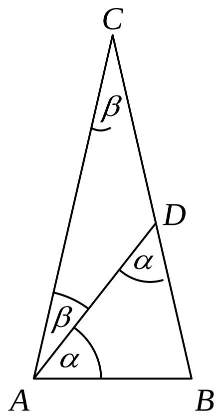
Pierwszą nierówność spełniają liczby $n \geq 3$, a drugą liczby $n \leq 42$. Zatem liczb naturalnych spełniających obydwa warunki mamy 40 i tyle też wyrazów ciągu leży w przedziale $(0,200)$.

Zadanie 36. (0-4)

Punkt D leży na boku BC trójkąta równoramiennego ABC, w którym $|AC| = |BC|$. Odcinek AD dzieli trójkąt ABC na dwa trójkąty równoramienne w taki sposób, że $|AD| = |CD|$ oraz $|AB| = |BD|$ (zobacz rysunek). Udowodnij, że $|\angle ADC| = 5 \cdot |\angle ACD|$.



Rozwiązanie I



Niech $\alpha = |\angle BAD|$ i $\beta = |\angle ACD|$. Trójkąty ABD, ACD i ABC są równoramienne, więc

$$|\angle DAB| = |\angle BAD| = \alpha, \quad |\angle CAD| = |\angle ACD| = \beta$$

$$\text{oraz } |\angle CAB| = |\angle CBA| = \alpha + \beta.$$

Suma miar kątów trójkąta ACD jest równa 180°, więc

$$|\angle ADC| = 180° - 2\beta.$$

Z drugiej strony $|\angle ADC| = 180° - |\angle ADB|$, czyli $180° - 2\beta = 180° - \alpha$. Stąd $\alpha = 2\beta$.

Suma miar kątów trójkąta ABC jest równa 180°, więc $2(\alpha + \beta) + \beta = 180°$, czyli $2(2\beta + \beta) + \beta = 180°$. Stąd $7\beta = 180°$.

Zatem $|\angle ADC| = 180° - 2\beta = 7\beta - 2\beta = 5\beta = 5 \cdot |\angle ACD|$. To kończy dowód.

Rozwiązanie II

Oznaczmy kąty α i β jak w poprzednim rozwiązaniu.

Ponieważ kąt ADB jest kątem zewnętrznym trójkąta ADC, więc $\alpha = 2\beta$.

Również kąt ADC jest kątem zewnętrznym trójkąta ABD, więc

$|\angle ADC| = \alpha + \alpha + \beta = 2\alpha + \beta = 4\beta + \beta = 5\beta = 5|\angle ACD|$, co kończy dowód.

Zadanie 37. (0-2)

Oblicz sinus kąta między przekątną sześcianu a jego płaszczyzną podstawy.
Rozwiązanie
Rozważmy trójkąt prostokątny ABC utworzony przez przekątną AB sześcianu, przekątną AC podstawy sześcianu oraz krawędź BC. Kąt ostry α tego trójkąta jest kątem między przekątną sześcianu i płaszczyzną jego podstawy. Długość przekątnej sześcianu o krawędzi długości a jest równa $a\sqrt{3}$, więc sinus kąta α jest równy

$$\sin\alpha = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Zadanie 38. (0-4)

W graniastosłupie czworokątnym prawidłowym przekątna o długości d jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem α takim, że $\sin\alpha = 0,2$. Wyznacz objętość tego graniastosłupa.

Rozwiązanie I
Przyjmijmy oznaczenia:
BD - przekątna podstawy
$|DH| = h$ - krawędź boczna
$|BH| = d$ - przekątna graniastosłupa
$|AB| = |BC| = |CD| = |DA| = a$
Trójkąt BDH jest prostokątny, więc

$$\sin\alpha = \frac{h}{d}\text{, czyli } \frac{1}{5} = \frac{h}{d}\text{. Stąd } h = \frac{1}{5}d.$$

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta BDH otrzymujemy

$$|BD|^2 = d^2 - h^2 = d^2 - \left(\frac{1}{5}d\right)^2 = \frac{24}{25}d^2.$$

Pole podstawy graniastosłupa jest więc równe

$$P_{ABCD} = \frac{1}{2}\cdot|BD|^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{24}{25}d^2 = \frac{12}{25}d^2.$$

Zatem objętość tego graniastosłupa jest równa

$$V = P_{ABCD}\cdot h = \frac{12}{25}d^2\cdot\frac{1}{5}d = \frac{12}{125}d^3.$$

Rozwiązanie II
Przyjmijmy oznaczenia jak w rozwiązaniu I.
Trójkąt BDH jest prostokątny, więc $\sin\alpha = \frac{h}{d}$, czyli $h = d\sin\alpha$. Stąd $h = 0,2d$.

W trójkącie BDH mamy również $\cos\alpha = \frac{a\sqrt{2}}{d}$, czyli $a\sqrt{2} = d\cos\alpha = d\sqrt{1-(0,2)^2} = \sqrt{0,96}\,d$.

Stąd $V = a^2h = \frac{1}{2}\cdot 0,96d^2\cdot 0,2d = 0,096d^3$.

Zadanie 39. (0-4)

Oblicz, ile jest wszystkich liczb naturalnych czterocyfrowych takich, że w ich zapisie dziesiętnym występuje jedna cyfra nieparzysta i trzy cyfry parzyste.
Uwaga: przypominamy, że zero jest liczbą parzystą.

Rozwiązanie
Mamy do dyspozycji 5 cyfr parzystych: 0, 2, 4, 6, 8 oraz 5 cyfr nieparzystych: 1, 3, 5, 7, 9. Musimy jednak pamiętać, że 0 nie może być pierwszą cyfrą zapisu dziesiętnego liczby. Dlatego rozważymy dwa przypadki: a) gdy pierwsza cyfra jest nieparzysta oraz b) gdy pierwsza cyfra jest parzysta.
W przypadku a) pierwszą cyfrę można wybrać na 5 sposobów; każda pozostała cyfra musi być parzysta i każdą z nich też możemy wybrać na 5 sposobów. Zatem w przypadku a) mamy 5^4 możliwości.
W przypadku b) cyfrę parzystą, stojącą na pierwszym miejscu, możemy wybrać na 4 sposoby. Na pozostałych miejscach mamy rozmieścić jedną cyfrę nieparzystą oraz dwie cyfry parzyste. Miejsce dla cyfry nieparzystej możemy wybrać na 3 sposoby; na pozostałych dwóch miejscach umieścimy cyfry parzyste. Cyfrę na każdym z tych trzech miejsc można wybrać na 5 sposobów. Zatem w przypadku b) mamy $4 \cdot 3 \cdot 5^3 = 12 \cdot 5^3$ możliwości.
W obu przypadkach łącznie otrzymujemy $5^4 + 12 \cdot 5^3 = (5+12) \cdot 5^3 = 17 \cdot 125 = 2125$ liczb spełniających warunki zadania.

Zadanie 40. (0-4)

Z pojemnika, w którym jest pięć losów: dwa wygrywające i trzy puste, losujemy dwa razy po jednym losie bez zwracania. Oblicz prawdopodobieństwo, że otrzymamy co najmniej jeden los wygrywający. Wynik przedstaw w postaci ułamka nieskracalnego.

Rozwiązanie I (model klasyczny)
Oznaczmy przez w_1, w_2 losy wygrywające, a przez p_1, p_2, p_3 losy puste. Wszystkie wyniki losowania dwóch losów bez zwracania możemy przedstawić w tabeli: wynik pierwszego losowania wyznacza wiersz, a wynik drugiego losowania - kolumnę, w przecięciu których leży pole, odpowiadające tej parze losowań. Pola położone na przekątnej odrzucamy, gdyż odpowiadałyby one wylosowaniu dwukrotnie tego samego losu, a to jest niemożliwe, gdyż losujemy bez zwracania.

Niech A oznacza zdarzenie polegające na wylosowaniu dwóch losów, wśród których co najmniej jeden jest wygrywający. Zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu A zaznaczamy w tabeli krzyżykiem (x).

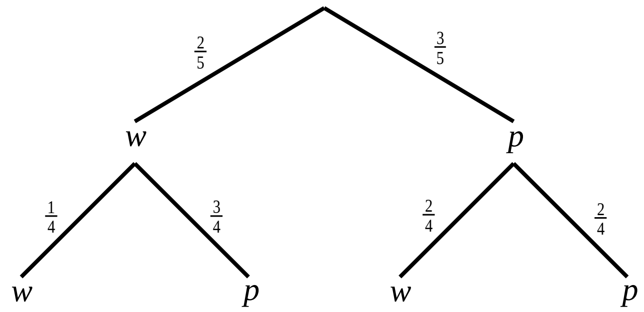
	w_1	w_2	p_1	p_2	p_3
w_1		x	x	x	x
w_2	x		x	x	x
p_1	x	x			
p_2	x	x			
p_3	x	x			

Mamy więc 20 wszystkich zdarzeń elementarnych, czyli $|\Omega| = 20$, oraz 14 zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A, czyli $|A| = 14$.

Prawdopodobieństwo zdarzenia A jest zatem równe $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{14}{20} = \frac{7}{10}$.

Rozwiązanie II (metoda drzewa)

Losowanie z pojemnika kolejno dwóch losów bez zwracania możemy zilustrować za pomocą drzewa, gdzie w oznacza wylosowanie losu wygrywającego, a p - losu pustego. Pogrubione gałęzie drzewa odpowiadają zdarzeniu A polegającemu na wylosowaniu dwóch losów, wśród których co najmniej jeden jest wygrywający. Na odcinkach drzewa zostały zapisane odpowiednie prawdopodobieństwa.



Zatem prawdopodobieństwo zdarzenia A jest równe

$$P(A) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} + \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} + \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{2+6+6}{20} = \frac{14}{20} = \frac{7}{10}.$$

Zadanie 41. (0-3)

Wykaż, że prawdziwa jest nierówność $\sqrt{2^{50}+1} + \sqrt{2^{50}-1} < 2^{26}$.

Rozwiązanie I

Dla dowodu przekształcimy w sposób równoważny tezę.

Ponieważ obie strony danej nierówności $\sqrt{2^{50}+1} + \sqrt{2^{50}-1} < 2^{26}$ są dodatnie, możemy je podnieść do kwadratu. Otrzymujemy kolejno:

$$\left(\sqrt{2^{50}+1} + \sqrt{2^{50}-1}\right)^2 < \left(2^{26}\right)^2$$

$$2^{50} + 1 + 2 \cdot \sqrt{2^{50}+1} \cdot \sqrt{2^{50}-1} + 2^{50} - 1 < 2^{52}$$

$$2 \cdot 2^{50} + 2\sqrt{\left(2^{50}-1\right)\left(2^{50}+1\right)} < 2^{52}$$

$$2\sqrt{2^{100}-1} < 2^{52} - 2^{51}$$

$$\sqrt{2^{100}-1} < 2^{50}.$$

Obie strony tej nierówności są także dodatnie, więc podnosząc je do kwadratu otrzymujemy

$$2^{100} - 1 < 2^{100}.$$

Otrzymana nierówność jest oczywiście prawdziwa, a zatem dana w zadaniu nierówność jest również prawdziwa, co kończy dowód.

Rozwiązanie II

Oznaczmy $a=\sqrt{2^{50}+1}$, $b=\sqrt{2^{50}-1}$. Zauważmy, że dla dowolnych liczb a, b, takich, że $a \neq b$, mamy $(a-b)^2>0$, skąd $a^2+b^2>2ab$. Wobec tego

$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab<a^2+b^2+a^2+b^2=2\left(a^2+b^2\right)=2\left(2^{50}+1+2^{50}-1\right)=2^{52}$.

Stąd $a+b<\sqrt{2^{52}}=2^{26}$, co kończy dowód.

Zadanie 42. (0-5)

W roku 2015 na uroczystości urodzinowej ktoś spytał jubilata, ile ma lat. Jubilat odpowiedział: jeżeli swój wiek sprzed 27 lat pomnożę przez swój wiek za 15 lat, to otrzymam rok swojego urodzenia. Oblicz, ile lat ma ten jubilat.

Rozwiązanie

Oznaczmy przez x obecny wiek jubilata (w latach). Wówczas wiek jubilata sprzed 27 lat jest równy x-27, wiek, jaki będzie miał za 15 lat, jest równy x+15, a rok jego urodzenia to 2015-x.
Mamy więc równanie $(x-27)(x+15)=2015-x$.
Po uporządkowaniu otrzymujemy $x^2-11x-2420=0$.
Rozwiązaniami tego równania są liczby x=55, $x=-44$.
Stąd wiemy, że jubilat w roku 2015 obchodzi 55. urodziny.

Przykładowe zadania
na poziomie rozszerzonym
z rozwiązaniami

Zadanie 1. (0-1)

Funkcja określona wzorem $f(x)=|x-3|-4$ dla wszystkich liczb rzeczywistych

A. nie ma miejsc zerowych.
B. ma dokładnie jedno miejsce zerowe.
C. ma dokładnie dwa miejsca zerowe.
D. ma więcej niż dwa miejsca zerowe.

Rozwiązanie: C

Zadanie 2. (0-3)

Niech $m=\log_{21}7$. Wykaż, że $\log_7 27=\frac{3(1-m)}{m}$.

Rozwiązanie (I sposób)

Zauważmy, że $\log_7 21=\frac{1}{\log_{21}7}=\frac{1}{m}$.

Zatem

$$\log_7 27=\log_7 3^3=3\log_7 3=3\log_7\left(\frac{21}{7}\right)=3\left(\log_7 21-\log_7 7\right)=3\left(\frac{1}{m}-1\right)=3\cdot\frac{1-m}{m}.$$

To kończy dowód.

Rozwiązanie (II sposób)

Zauważamy, że

$$\frac{3(1-m)}{m}=3\left(\frac{1}{m}-1\right)=3\left(\log_7 21-1\right)=3\left(\log_7 21-\log_7 7\right)=3\log_7\frac{21}{7}=\log_7 3^3=\log_7 27,$$

co kończy dowód.

Zadanie 3. (0-2)

Oblicz najmniejszą liczbę naturalną n spełniającą nierówność $\left|\frac{2n-10}{3n+1}-\frac{2}{3}\right|<\frac{1}{30}$.

Rozwiązanie

Rozwiązujemy nierówność $\left|\frac{2n-10}{3n+1}-\frac{2}{3}\right|<\frac{1}{30}$. Przekształcamy ją w sposób równoważny:

$$\left|\frac{3(2n-10)-2(3n+1)}{3(3n+1)}\right|<\frac{1}{30},$$

$$\left|\frac{-32}{3(3n+1)}\right|<\frac{1}{30},$$

$$\frac{32}{3(3n+1)} < \frac{1}{30},$$

$$3n+1 > 320,$$

$$n > 106\frac{1}{3}.$$

W powyższych przekształceniach dwukrotnie skorzystaliśmy z tego, że $3(3n+1) > 0$. Zatem najmniejszą liczbą naturalną spełniającą podaną nierówność jest $n = 107$.

Zadanie 4. (0-2)

Równanie $x^2 + 48x + 2 = 0$ ma dwa rozwiązania x_1, x_2. Liczba $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2}$ jest liczbą całkowitą dodatnią. Znajdź tę liczbę. Zakoduj cyfry setek, dziesiątek i jedności otrzymanego wyniku.

Rozwiązanie
Korzystając ze wzorów Viète'a otrzymujemy: $x_1 + x_2 = -48$ oraz $x_1 \cdot x_2 = 2$.

$$\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1^2 \cdot x_2^2} = \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2}{(x_1 \cdot x_2)^2} = \frac{(-48)^2 - 2\cdot 2}{2^2} = 575.$$

Należy zakodować cyfry 5, 7, 5.

Zadanie 5. (0-2)

Wielomian $W(x) = x^4 + 2x^3 - 5x^2 - 6px + 9$ jest podzielny przez dwumian $x-1$. Oblicz p. Zakoduj pierwsze trzy cyfry po przecinku nieskończonego rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

Rozwiązanie
$W(x)$ jest podzielny przez $x-1$, zatem $W(1) = 0$. $W(1) = 7 - 6p$. Stąd $p = 1{,}166\ldots$.
Należy zakodować cyfry 1, 6, 6.

Uwaga
Należy zakodować cyfry otrzymanego wyniku, a nie wyniku przybliżonego, zatem cyfry 1, 6, 6, a nie 1, 6, 7.

Zadanie 6. (0-3)

Wykaż, że dla każdej liczby całkowitej k liczba $k(k+1)(k+9)(k^2+1)$ jest podzielna przez 5.

Rozwiązanie
Iloczyn jest podzielny przez 5, jeżeli co najmniej jeden z czynników jest podzielny przez 5.
Jeżeli $k = 5l$ (l jest liczbą całkowitą), to pierwszy czynnik jest podzielny przez 5.
Jeżeli $k = 5l + 1$, to czynnik $(k+9) = 5l + 10 = 5(l+2)$ jest podzielny przez 5.
Jeżeli $k = 5l + 2$, to czynnik $(k^2+1) = 25l^2 + 20l + 4 + 1 = 5(5l^2 + 4l + 1)$ jest podzielny przez 5.

Jeżeli $k=5l+3$, to czynnik $\left(k^2+1\right)=25l^2+30l+9+1=5\left(5l^2+6+2\right)$ jest podzielny przez 5.

Jeżeli $k=5l+4$, to czynnik $\left(k+1\right)=5l+4+1=5\left(l+1\right)$ jest podzielny przez 5.

Zadanie 7. (0-2)

Udowodnij, że jeśli $a>0$ i $b>0$ oraz $a+b=1$, to $ab\le\frac{1}{4}$.

Rozwiązanie (I sposób)
Korzystamy z nierówności między średnią arytmetyczną i geometryczną:

$$\sqrt{ab}\le\frac{a+b}{2}=\frac{1}{2},$$

czyli

$$ab\le\frac{1}{4}.$$

To kończy dowód.

Rozwiązanie (II sposób)

Z założenia mamy $b=1-a$. Przekształcamy nierówność $ab\le\frac{1}{4}$ w sposób równoważny

$$a\left(1-a\right)\le\frac{1}{4},$$

$$a^2-a+\frac{1}{4}\ge 0,$$

$$\left(a-\frac{1}{2}\right)^2\ge 0.$$

Ta nierówność jest prawdziwa. To kończy dowód.

Rozwiązanie (III sposób)

Oznaczmy: $a=\frac{1}{2}+x$, $b=\frac{1}{2}-x$. Wówczas

$$ab=\left(\frac{1}{2}+x\right)\left(\frac{1}{2}-x\right)=\frac{1}{4}-x^2\le\frac{1}{4},$$

co kończy dowód.

Zadanie 8. (0-5)

Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których funkcja f określona wzorem

$$f\left(x\right)=\left(m^2-1\right)x^2-2\left(1-m\right)x+2$$

przyjmuje wartości dodatnie dla każdej liczby rzeczywistej.

Rozwiązanie

Funkcja $f\left(x\right)=\left(m^2-1\right)x^2-2\left(1-m\right)x+2$ w zależności od parametru m jest liniowa lub kwadratowa. Rozważmy dwa przypadki:

1. Gdy $m^2-1=0$, to funkcja f jest liniowa.

1. Dla $m=-1$ funkcja ma wzór $f(x)=-4x+2$, więc $m=-1$ nie spełnia warunków zadania.
2. Dla $m=1$ funkcja ma wzór $f(x)=2$, więc $m=1$ spełnia warunki zadania.

2. Gdy $m^2-1\neq 0$, to funkcja f jest kwadratowa. Funkcja kwadratowa przyjmuje wartości dodatnie dla każdej liczby rzeczywistej x, gdy parabola będąca jej wykresem leży w całości nad osią Ox. Funkcja $f(x)=\left(m^2-1\right)x^2-2(1-m)x+2$ ma tę własność, kiedy zachodzą warunki:
   1. $m^2-1>0$,
   2. $\Delta<0$.

   Pierwszy warunek jest spełniony dla $m\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$.

   Warunek $\Delta<0$ jest spełniony, gdy
$$4(1-m)^2-8\left(m^2-1\right)<0,$$
$$(m-1)^2-2(m-1)(m+1)<0,$$
$$(m-1)(m-1-2m-2)<0,$$
$$(m-1)(-m-3)<0,$$
$$-(m-1)(m+3)<0,$$
$$m\in(-\infty,-3)\cup(1,+\infty).$$

Zatem funkcja kwadratowa przyjmuje wartości dodatnie dla $m\in(-\infty,-3)\cup(1,+\infty)$.

Uwzględniając oba przypadki, otrzymujemy $m\in(-\infty,-3)\cup\langle 1,+\infty)$.

Zadanie 9. (0-1)

Granica $\lim\limits_{x\to -3^-}\frac{-5x}{x+3}$ jest równa

A. $-\infty$
B. 0
C. 6
D. $+\infty$

Rozwiązanie : A

Zadanie 10. (0-2)

Oblicz $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-2n^3+3n}{(1-4n)^3}$.

Zakoduj pierwsze trzy cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

Rozwiązanie

Obliczamy granicę $$\lim_{n\to\infty}\frac{-2n^3+3n}{(1-4n)^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3\left(-2+\frac{3}{n^2}\right)}{n^3\left(\frac{1}{n}-4\right)^3}=\frac{1}{32}=0,03125.$$

Ponieważ $\frac{1}{32}=0,03125$, więc należy zakodować cyfry: 0, 3, 1.

Zadanie 11. (0-2)

Dany jest nieskończony ciąg geometryczny (a_n) o wyrazach dodatnich taki, że $a_1 = \frac{3}{4}$, $a_3 = \frac{1}{3}$. Oblicz sumę wszystkich wyrazów tego ciągu.

Rozwiązanie

Pierwszy wyraz i trzeci wyraz tego ciągu są odpowiednio równe: $a_1 = \frac{3}{4}$, $a_3 = \frac{1}{3}$. Ponieważ $a_3 = a_1 \cdot q^2$, stąd $q^2 = \frac{a_3}{a_1} = \frac{4}{9}$. Zatem $q = -\frac{2}{3}$ lub $q = \frac{2}{3}$. Wyrazy ciągu są dodatnie, więc $q = \frac{2}{3}$. Ponieważ $|q| = \left|\frac{2}{3}\right| < 1$, więc

$$S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{\frac{3}{4}}{1-\frac{2}{3}} = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{1} = \frac{9}{4}.$$

Suma S wszystkich wyrazów nieskończonego ciągu geometrycznego (a_n) o wyrazach dodatnich jest równa: $S = \frac{9}{4}$.

Zadanie 12. (0-2)

Dana jest funkcja f określona wzorem $f(x) = \frac{2x^4 + 15}{6 - x^2}$ dla wszystkich liczb rzeczywistych x, takich że $x \neq -\sqrt{6}$ i $x \neq \sqrt{6}$. Oblicz wartość pochodnej tej funkcji w punkcie $x = 1$.
Zakoduj cyfrę jedności i dwie pierwsze cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego obliczonego wyniku.

Rozwiązanie

Obliczamy pochodną:

$$f'(x) = \frac{\left(2x^4+15\right)'\left(6-x^2\right) - \left(2x^4+15\right)\left(6-x^2\right)'}{\left(6-x^2\right)^2} =$$

$$= \frac{8x^3\left(6-x^2\right) + 2x\left(2x^4+15\right)}{\left(6-x^2\right)^2} = \frac{2x\left(-2x^4+24x^2+15\right)}{\left(6-x^2\right)^2},$$

$$f'(1) = \frac{2\left(-2+24+15\right)}{(5)^2} = \frac{2 \cdot 37}{25} = \frac{74}{25} = 2{,}96.$$

Należy zakodować cyfry: 2, 9, 6.

Zadanie 13. (0-3)

Dana jest funkcja f określona wzorem $f(x)=4x^3-2x+1$ dla wszystkich liczb rzeczywistych. Uzasadnij, że prosta l o równaniu $10x-y+9=0$ jest styczna do wykresu funkcji f.

Rozwiązanie
Zapisujemy równanie prostej l w postaci kierunkowej $y=10x+9$.
Wyznaczamy pochodną funkcji f: $f'(x)=12x^2-2$.
Zauważamy, że dla $x=-1$ oraz dla $x=1$ pochodna funkcji f ma wartość 10 i równa się współczynnikowi kierunkowemu prostej l.
Obliczamy wartość funkcji f w punkcie $x=-1$: $f(-1)=-1$ oraz w punkcie $x=1$: $f(1)=3$.
Punkt o współrzędnych $(-1,-1)$ leży na prostej l, natomiast punkt o współrzędnych $(1,3)$ nie leży na tej prostej. Zatem prosta o równaniu $10x-y+9=0$ jest styczna do wykresu funkcji f, co kończy dowód.

Zadanie 14. (0-7)

Rozpatrujemy wszystkie ostrosłupy prawidłowe trójkątne, w których suma promienia okręgu opisanego na podstawie ostrosłupa i wysokości tego ostrosłupa jest równa 24. Wyznacz promień okręgu opisanego na podstawie tego z ostrosłupów, który ma największą objętość. Oblicz tę objętość.

Rozwiązanie
Oznaczamy:
A, B, C - wierzchołki podstawy ostrosłupa.
S - wierzchołek ostrosłupa.
O - środek okręgu opisanego na podstawie ostrosłupa.

Niech $x=|AO|=|BO|=|CO|$ oznacza promień okręgu opisanego na podstawie ostrosłupa oraz $h=|SO|$ oznacza wysokość tego ostrosłupa. Wówczas $x+h=24$.

Wysokość AD w trójkącie ABC jest równa $|AD|=\frac{|AB|\cdot\sqrt{3}}{2}$. Zatem promień x okręgu opisanego na trójkącie ABC (podstawie ostrosłupa) jest równy: $x=\frac{2}{3}\cdot\frac{|AB|\sqrt{3}}{2}=\frac{|AB|\sqrt{3}}{3}$, stąd $|AB|=x\sqrt{3}$. Wyznaczamy pole podstawy ostrosłupa: $P=\frac{3x^2\sqrt{3}}{4}$.
Ponadto z równości $x+h=24$ otrzymujemy $h=24-x$, gdzie $0<x<24$.
Zatem objętość tego ostrosłupa jest określona wzorem: $V=\frac{1}{3}\cdot\frac{3x^2\sqrt{3}}{4}\cdot(24-x)$, czyli $V=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(-x^3+24x^2\right)$.
Należy obliczyć, dla jakiego x spełniającego nierówność $0<x<24$ funkcja V określona wzorem $V(x)=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(-x^3+24x^2\right)$ przyjmuje wartość największą.

Rozważamy funkcję $f(x) = -x^3 + 24x^2$ określoną dla każdej liczby rzeczywistej x.

Wyznaczamy pochodną tej funkcji f : $f'(x) = -3x^2 + 48x$.

Następnie obliczamy miejsca zerowe pochodnej: $x_1 = 16$, $x_2 = 0$. Ponadto:

- $f'(x) < 0$ w każdym z przedziałów $(-\infty, 0)$ oraz $(16, +\infty)$,
- $f'(x) > 0$ w przedziale $(0, 16)$.

Zatem funkcja f jest malejąca w każdym z przedziałów $(-\infty, 0\rangle$ oraz $\langle 16, +\infty)$ i rosnąca w przedziale $\langle 0, 16\rangle$.

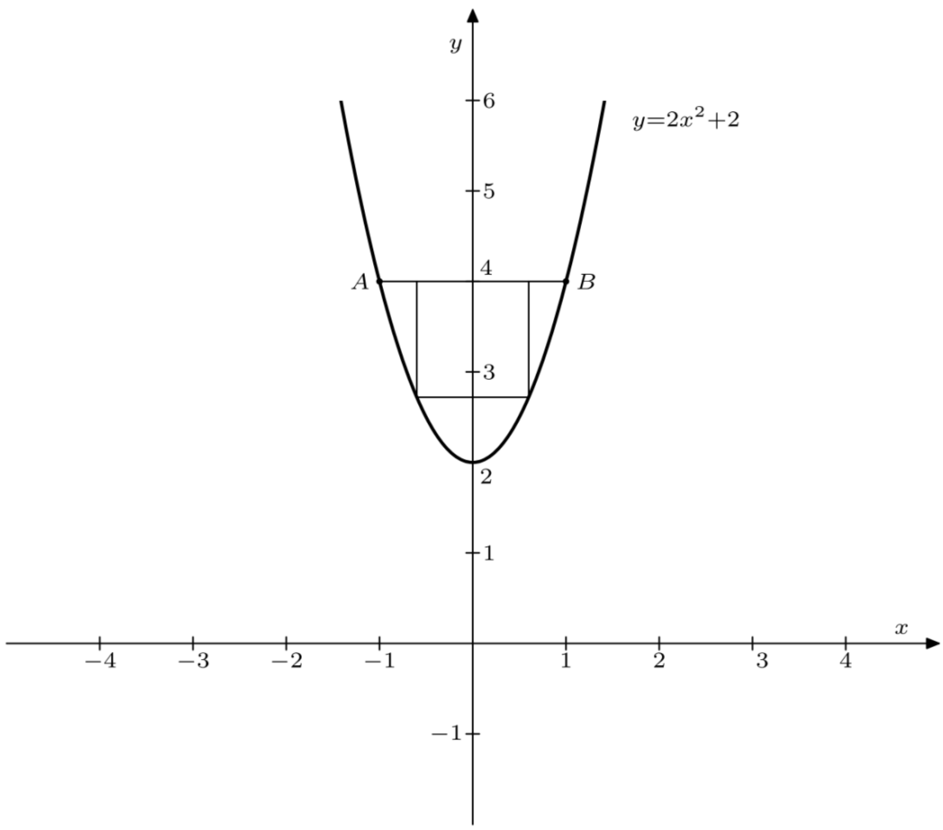
Ponieważ $V(x) = \frac{\sqrt{3}}{4} f(x)$ dla $x \in (0, 24)$, więc w przedziale $x \in (0, 24)$ funkcja $V(x)$ ma ekstremum w tym samym punkcie, w którym funkcja $f(x)$. Stąd wynika, że w punkcie $x = 16$ funkcja V przyjmuje wartość największą.

Objętość ostrosłupa jest równa: $V = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(-16^3 + 24 \cdot 16^2\right) = 512\sqrt{3}$.

Objętość ostrosłupa prawidłowego trójkątnego jest największa i równa $V = 512\sqrt{3}$, gdy promień okręgu opisanego na podstawie jest równy 16.

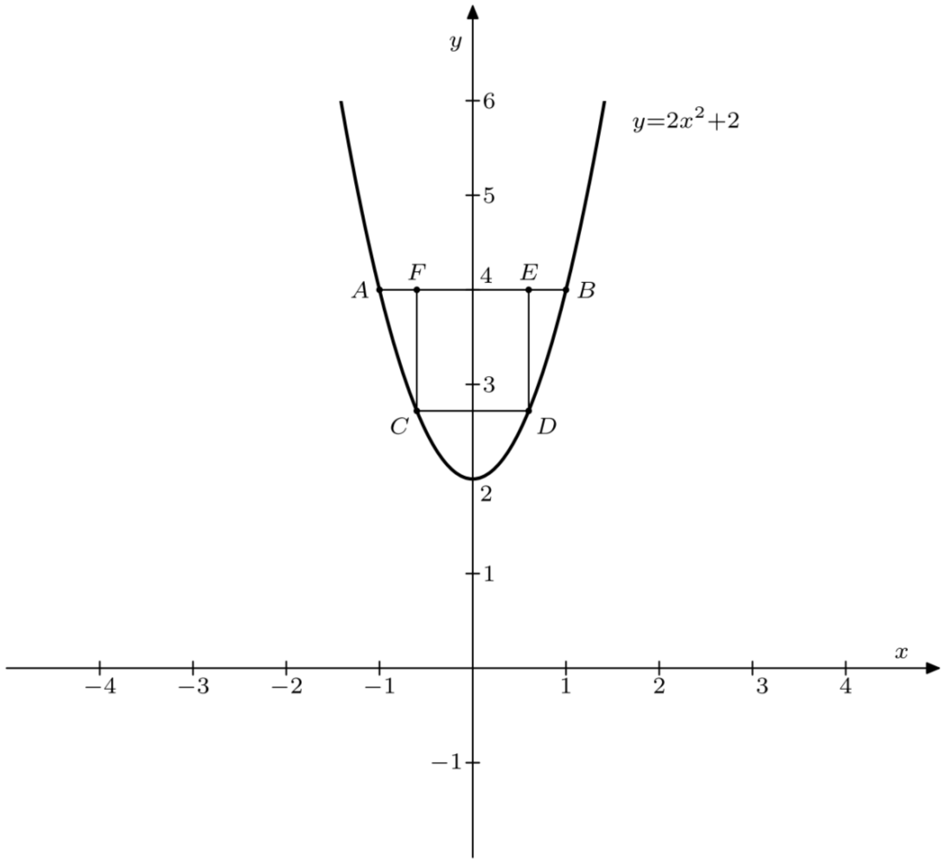
Zadanie 15. (0-7)

Rozważamy wszystkie prostokąty, których dwa wierzchołki leżą na odcinku AB, gdzie $A = (-1, 4)$ i $B = (1, 4)$, a pozostałe dwa na paraboli o równaniu $y = 2x^2 + 2$ (zobacz rysunek). Wyznacz wymiary tego z prostokątów, który ma największe pole. Oblicz to pole.



Rozwiązanie

Niech punkty C i D leżą na paraboli $y = 2x^2 + 2$, a punkty E i F leżą na odcinku AB (zob. rysunek). Oznaczmy przez x odległość punktu D od osi Oy.



Wówczas punkt D ma współrzędne $D = \left(x, 2x^2 + 2\right)$, punkt C ma współrzędne $C = \left(-x, 2x^2 + 2\right)$. Punkty E i F leżą na prostej o równaniu $y = 4$, zatem ich współrzędne są równe: $E = (x, 4)$ i $F = (-x, 4)$.

Wyznaczamy długości boków CD i DE prostokąta CDEF:

$|CD| = 2x$ oraz $|DE| = 2 - 2x^2$ dla $0 < x < 1$.

Zatem pole prostokąta CDEF jest określone wzorem: $P(x) = 2x \cdot \left(2 - 2x^2\right)$, czyli

$P(x) = -4x^3 + 4x$ dla $0 < x < 1$.

Rozważamy funkcję $f(x) = -4x^3 + 4x$ określoną dla każdej liczby rzeczywistej x.

Wyznaczamy pochodną tej funkcji f : $f'(x) = -12x^2 + 4$.

Następnie obliczamy miejsca zerowe pochodnej: $x_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $x_2 = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Ponadto:

- $f'(x) < 0$ w każdym z przedziałów $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ oraz $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$,
- $f'(x) > 0$ w przedziale $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

Zatem funkcja f jest malejąca w każdym z przedziałów $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right\rangle$ oraz $\left\langle\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$ i rosnąca w przedziale $\left\langle -\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right\rangle$.

Ponieważ $P(x) = f(x)$ dla $x \in (0,1)$, więc w przedziale $x \in (0,1)$ funkcja $P(x)$ ma ekstremum w tym samym punkcie, w którym funkcja $f(x)$. Stąd wynika, że w punkcie $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ funkcja P przyjmuje wartość największą.

Obliczamy wymiary prostokąta: $|CD| = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, $|DE| = 2 - 2\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{4}{3}$.

Największe pole ma prostokąt o wymiarach $\frac{2\sqrt{3}}{3}$, $\frac{4}{3}$. Jest ono równe $\frac{8\sqrt{3}}{9}$.

Zadanie 16. (0-7)

Rozpatrujemy wszystkie trapezy równoramienne, w których krótsza podstawa ma długość 5 i każde z ramion też ma długość 5. Oblicz długość dłuższej podstawy tego z rozpatrywanych trapezów, który ma największe pole. Oblicz to pole.

Rozwiązanie

Niech $2x + 5$ oznacza długość dłuższej podstawy, a h wysokość trapezu.

h h

x x

Pole tego trapezu jest określone wzorem

$$P = \frac{2\cdot 5 + 2x}{2}\cdot h = (5 + x)\cdot h \text{ i } 0 < x < 5.$$

Z twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy zależność $x^2 + h^2 = 5^2$, stąd $h = \sqrt{25 - x^2}$.

Pole tego trapezu jest określone wzorem

$$P(x) = (5 + x)\cdot\sqrt{25 - x^2} = \sqrt{(5 + x)^2\cdot\left(25 - x^2\right)} =$$
$$= \sqrt{(5 + x)^3\cdot(5 - x)} = \sqrt{-x^4 - 10x^3 + 250x + 625},$$

gdzie $0 < x < 5$.

Należy obliczyć, dla jakiego x spełniającego nierówność $0 < x < 5$ funkcja P określona wzorem $P(x) = \sqrt{-x^4 - 10x^3 + 250x + 625}$ przyjmuje wartość największą.

Ponieważ funkcja pierwiastkowa ($y=\sqrt{t}$) jest rosnąca, więc wystarczy zbadać funkcję $f(x)=-x^4-10x^3+250x+625$. Wyznaczamy pochodną tej funkcji:

$$f'(x)=-4x^3-30x^2+250.$$

Następnie obliczamy miejsca zerowe pochodnej: $x_1=-5$, $x_2=\frac{5}{2}$.

Ponadto:

- $f'(x)<0$ w każdym z przedziałów $(-\infty,-5)$ oraz $\left(\frac{5}{2},+\infty\right)$,
- $f'(x)>0$ w przedziale $\left(-5,\frac{5}{2}\right)$.

Zatem funkcja f jest malejąca w każdym z przedziałów $(-\infty,-5\rangle$ oraz $\left\langle\frac{5}{2},+\infty\right)$ i rosnąca w przedziale $\left\langle-5,\frac{5}{2}\right\rangle$.

Ponieważ $P(x)=\sqrt{f(x)}$ dla $x\in(0,5)$, więc w przedziale $x\in(0,5)$ funkcja $P(x)$ ma ekstremum w tym samym punkcie, w którym funkcja $f(x)$. Stąd wynika, że w punkcie $x=\frac{5}{2}$ funkcja P przyjmuje wartość największą.

Zauważmy wreszcie, że jeżeli $x=\frac{5}{2}$, to $2x+5=10$. Zatem dłuższa podstawa ma długość 10.

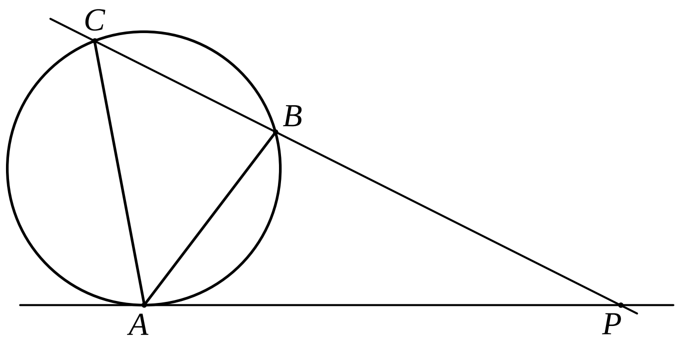
Obliczamy największe pole trapezu dla $x=\frac{5}{2}$:

$$P(x)=\left(5+\frac{5}{2}\right)\cdot\sqrt{25-\left(\frac{5}{2}\right)^2}=\frac{15}{2}\cdot\frac{5}{2}\sqrt{3}=\frac{75}{4}\sqrt{3}.$$

Największe pole ma trapez, którego dłuższa podstawa ma długość 10. Pole tego trapezu jest równe $\frac{75\sqrt{3}}{4}$.

Zadanie 17. (0-3)

Dany jest trójkąt ABC i prosta k styczna w punkcie A do okręgu opisanego na tym trójkącie. Prosta BC przecina prostą k w punkcie P. Długości odcinków są odpowiednio równe: |AC| = 12, |CB| = 9, |BP| = 17.



Oblicz długość odcinka AB. Zakoduj cyfrę jedności i dwie pierwsze cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

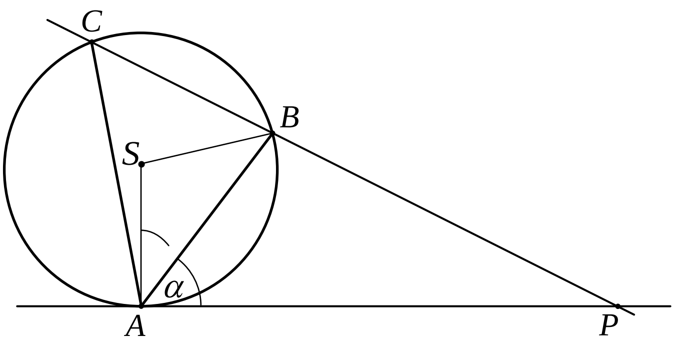
Rozwiązanie (I sposób)

Niech S oznacza środek okręgu opisanego na trójkącie ABC i niech $\alpha = |\angle PAB|$. Kąt PAS jest prosty, więc $|\angle BAS| = 90° - \alpha$. Trójkąt ABS jest równoramienny, zatem

$$|\angle ASB| = 180° - 2 \cdot |\angle BAS| = 180° - 2 \cdot (90° - \alpha) = 2\alpha .$$

Z twierdzenia o kącie środkowym i wpisanym opartych na tym samym łuku wynika, że

$$|\angle ACB| = \frac{1}{2} \cdot |\angle ASB| = \frac{1}{2} \cdot 2\alpha = \alpha .$$



Oznaczmy $|AB| = x$ oraz $|PA| = y$.

Trójkąty APB i CPA są podobne, gdyż $|\angle PAB| = |\angle PCA|$ i kąt przy wierzchołku P jest wspólnym kątem tych trójkątów. Zatem

$$\frac{|PA|}{|PC|} = \frac{|PB|}{|PA|},$$

$$\frac{y}{26} = \frac{17}{y},$$

$$y^2 = 17 \cdot 26 .$$

Stąd $y = \sqrt{17 \cdot 26}$. Z podobieństwa trójkątów APB i CPA otrzymujemy też

$$\frac{|AB|}{|PA|} = \frac{|CA|}{|PC|},$$

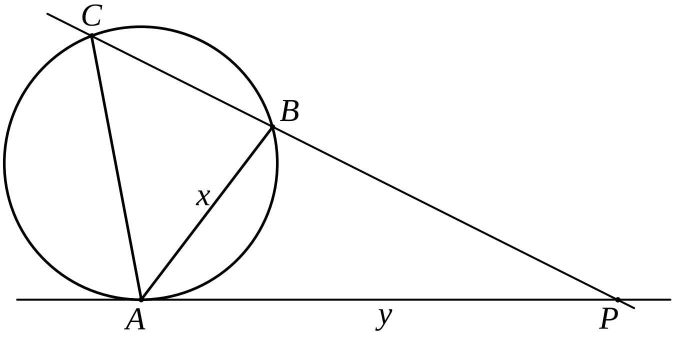
$$\frac{x}{y} = \frac{12}{26} .$$

Zatem $x = \frac{12y}{26} = \frac{12\sqrt{17 \cdot 26}}{26} = \frac{12\sqrt{17}}{\sqrt{26}} = 9,7032...$

Kodujemy cyfry: 9, 7, 0.

Rozwiązanie (II sposób)

Z twierdzenia o kącie między styczną a cięciwą wynika, że kąty PAB i ACB są równe. Ponadto kąt przy wierzchołku P jest wspólnym kątem trójkątów APB i CPA. Zatem te trójkąty są podobne.



Stąd mając dane: |AC| = 12, |CB| = 9, |BP| = 17 i oznaczając |AB| = x, |AP| = y, otrzymujemy:

$$\frac{|PA|}{|PC|} = \frac{|PB|}{|PA|},$$

$$\frac{y}{26} = \frac{17}{y},$$

$$y^2 = 17 \cdot 26.$$

Zatem $y = \sqrt{17 \cdot 26}$. Z podobieństwa trójkątów APB i CPA otrzymujemy też

$$\frac{|AB|}{|PA|} = \frac{|CA|}{|PC|},$$

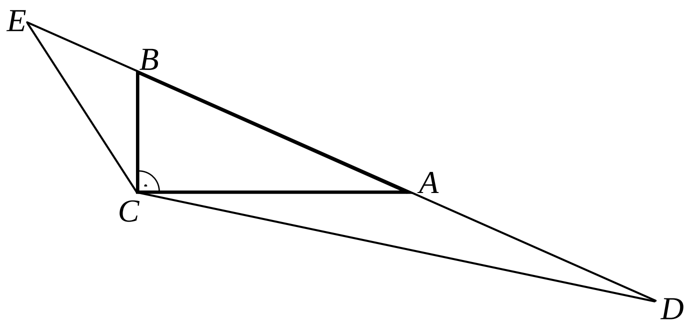
$$\frac{x}{y} = \frac{12}{26}.$$

Stąd $x = \frac{12y}{26} = \frac{12\sqrt{17 \cdot 26}}{26} = \frac{12\sqrt{17}}{\sqrt{26}} = 9,7032...$

Kodujemy cyfry: 9, 7, 0.

Zadanie 18. (0-6)

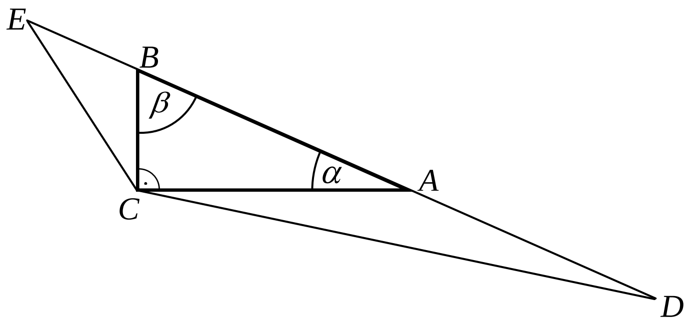
Dany jest trójkąt prostokątny ABC o kącie prostym przy wierzchołku C i obwodzie równym $2p$. Na prostej AB obrano punkty D i E leżące na zewnątrz odcinka AB takie, że $|AD| = |AC|$ i $|BE| = |BC|$ (zobacz rysunek).



Wykaż, że promień okręgu opisanego na trójkącie ECD jest równy $p\sqrt{2}$.

Rozwiązanie

Niech $\alpha = |\sphericalangle BAC|$, $\beta = |\sphericalangle ABC|$ (zobacz rysunek).



Kąty CAD i CBE to kąty przyległe odpowiednio do kątów BAC i ABC trójkąta ABC, więc

$$|\sphericalangle CAD| = 180^\circ - \alpha \text{ oraz } |\sphericalangle CBE| = 180^\circ - \beta .$$

Trójkąty CAD i CBE są równoramienne, więc

$$|\sphericalangle DCA| = \frac{180^\circ - (180^\circ - \alpha)}{2} = \frac{\alpha}{2} \text{ oraz } |\sphericalangle ECB| = \frac{180^\circ - (180^\circ - \beta)}{2} = \frac{\beta}{2} .$$

Zatem miara kąta ECD jest równa

$$|\sphericalangle ECD| = |\sphericalangle DCA| + 90^\circ + |\sphericalangle ECB| = \frac{\alpha}{2} + 90^\circ + \frac{\beta}{2} = 90^\circ + \frac{1}{2}(\alpha + \beta) .$$

Stąd

$$|\sphericalangle ECD| = 90^\circ + \frac{1}{2}(\alpha + \beta) = 135^\circ .$$

Z twierdzenia sinusów dla trójkąta ECD wynika, że

$$\frac{|ED|}{\sin \sphericalangle ECD} = 2R ,$$

gdzie R to promień okręgu opisanego na trójkącie ECD. Ponieważ $|ED| = a + b + c = 2p$ i

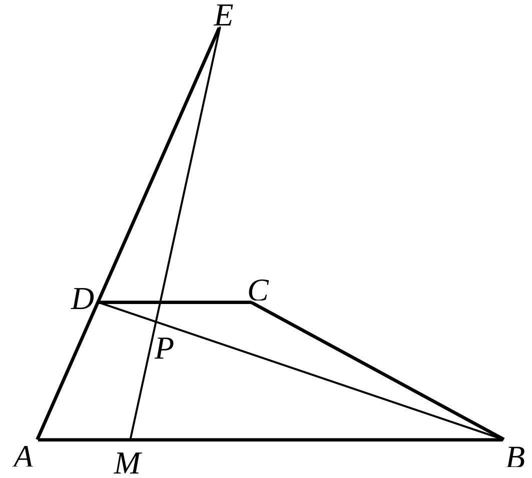
$\sin \sphericalangle ECD = \sin 135^\circ = \sin(180^\circ - 45^\circ) = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$, więc

$$2R = \frac{2p}{\frac{\sqrt{2}}{2}} .$$

Stąd $R = p\sqrt{2}$, co kończy dowód.

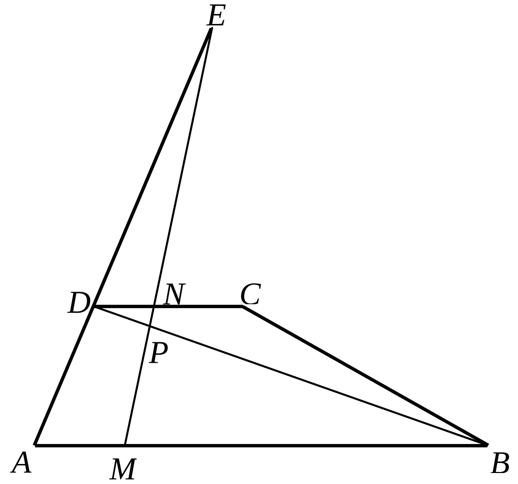
Zadanie 19. (0-3)

Ramię AD trapezu ABCD (w którym $AB \parallel CD$) przedłużono do punktu E takiego, że $|AE| = 3 \cdot |AD|$. Punkt M leży na podstawie AB oraz $|MB| = 4 \cdot |AM|$. Odcinek ME przecina przekątną BD w punkcie P (zobacz rysunek).



Udowodnij, że $|BP| = 6 \cdot |PD|$.

Rozwiązanie
Niech N oznacza punkt przecięcia odcinka EM z prostą DC.



Trójkąt AME jest podobny do trójkąta DNE (kąty MAE i NDE są równe oraz kąty AME i DNE są równe, gdyż proste AB i DC są równoległe). Stąd

$$\frac{|AM|}{|AE|} = \frac{|DN|}{|DE|},$$

ale $|AE| = 3 \cdot |AD|$, więc $|DN| = \frac{2}{3} \cdot |AM|$.

Trójkąt MBP jest podobny do trójkąta NDP (kąty MBP i NDP są równe oraz kąty BMP i DNP, gdyż proste AB i DC są równoległe). Stąd

$$\frac{|BP|}{|BM|}=\frac{|DP|}{|DN|},$$

ale $|BM|=4\cdot|AM|$, więc $|BP|=\frac{4\cdot|AM|\cdot|DP|}{|DN|}=\frac{4\cdot|AM|}{\frac{2}{3}|AM|}\cdot|DP|=6\cdot|DP|$.

To kończy dowód.

Zadanie 20. (0-4)

Okrąg jest styczny do osi Ox w punkcie $A=(2,0)$. Punkt $B=(-1,9)$ leży na tym okręgu. Wyznacz równanie tego okręgu.

Rozwiązanie

Niech $S=(a,b)$ będzie środkiem szukanego okręgu. Ponieważ okrąg ten jest styczny do osi Ox w punkcie $A=(2,0)$, więc $S=(2,b)$. Z definicji okręgu wynika, że $|AS|=|BS|$, czyli

$$(2-2)^2+(b-0)^2=(2+1)^2+(b-9)^2.$$

Stąd

$$b^2=9+b^2-18b+81,$$
$$b=5.$$

Zatem $S=(2,5)$, a równanie okręgu ma postać $(x-2)^2+(y-5)^2=25$.

Zadanie 21. (0-5)

Okrąg o środku $S=(3,2)$ leży wewnątrz okręgu o równaniu $(x-6)^2+(y-8)^2=100$ i jest do niego styczny. Wyznacz równanie prostej stycznej do obu tych okręgów.

Rozwiązanie

Środkiem okręgu o równaniu $(x-6)^2+(y-8)^2=100$ jest punkt $S_1=(6,8)$, a promień tego okręgu jest równy 10. Środki S i S_1 okręgów leżą na prostej o równaniu $y=2x-4$.

Szukana styczna jest prostopadła do tej prostej, więc ma równanie postaci $y=-\frac{1}{2}x+b$.

Odległość środka $S_1=(6,8)$ od stycznej jest równa 10, zatem

$$\frac{\left|\frac{1}{2}\cdot 6+8-b\right|}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+1^2}}=10,$$

$$|11-b|=10\cdot\sqrt{\frac{5}{4}},$$

$$|11-b|=5\sqrt{5}.$$

Stąd $11-b=5\sqrt{5}$ lub $11-b=-5\sqrt{5}$, czyli $b=11-5\sqrt{5}$ lub $b=11+5\sqrt{5}$. Otrzymujemy więc dwie proste o równaniach $y=-\frac{1}{2}x+11-5\sqrt{5}$ oraz $y=-\frac{1}{2}x+11+5\sqrt{5}$.

Odległość środka S od prostej o równaniu $y=-\frac{1}{2}x+11-5\sqrt{5}$ jest równa

$$\frac{\left|\frac{1}{2}\cdot 3+2+11-5\sqrt{5}\right|}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+1^2}}=\frac{29}{5}\sqrt{5}-10\cdot$$

Ponieważ $\frac{29}{5}\sqrt{5}-10<10$, więc ta prosta jest szukaną styczną.

Zadanie 22. (0-1)

Równanie $\sin^2 x=\sin x$ w przedziale $\langle 0,\pi\rangle$

A. ma dokładnie 1 rozwiązanie.
B. ma dokładnie 2 rozwiązania.
C. ma dokładnie 3 rozwiązania.
D. nie ma rozwiązań.

Rozwiązanie

Przekształcamy równanie $\sin^2 x=\sin x$ do postaci $\sin x\cdot(\sin x-1)=0$, zatem $\sin x=0$ lub $\sin x=1$. Rozwiązaniami równania $\sin x=0$ w przedziale $\langle 0,\pi\rangle$ jest $x=0$ oraz $x=\pi$, a rozwiązaniem równania $\sin x=1$ jest $x=\frac{\pi}{2}$. Stąd równanie $\sin^2 x=\sin x$ w przedziale $\langle 0,\pi\rangle$ ma dokładnie 3 rozwiązania.

Zdający powinien zaznaczyć odpowiedź C.

Zadanie 23. (0-4)

Rozwiąż równanie $\sin 5x-\cos 2x+\sin x=0$.

Rozwiązanie

Przekształcamy równanie, korzystając ze wzoru na sumę sinusów: $2\sin 3x\cos 2x-\cos 2x=0$.
Stąd $\cos 2x\cdot(2\sin 3x-1)=0$. Zatem $\cos 2x=0$ lub $2\sin 3x-1=0$.

Rozwiązaniami równania $\sin 5x-\cos 2x+\sin x=0$ są liczby: $x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}$, gdzie k jest liczbą całkowitą, lub $x=\frac{\pi}{18}+\frac{2k\pi}{3}$, gdzie k jest liczbą całkowitą, lub $x=\frac{5\pi}{18}+\frac{2k\pi}{3}$, gdzie k jest liczbą całkowitą.

Zadanie 24. (0-3)

Wykaż, że dla każdego kąta α prawdziwa jest równość: $4\left(\sin^6\alpha+\cos^6\alpha\right)=1+3\cos^2 2\alpha$

Rozwiązanie

Korzystając z tożsamości

$$a^6+b^6=\left(a^2+b^2\right)\left(a^4-a^2b^2+b^4\right)=\left(a^2+b^2\right)\cdot\left(\left(a^2+b^2\right)^2-3a^2b^2\right),$$

przekształcamy wyrażenie $4\left(\sin^6\alpha+\cos^6\alpha\right)$ i otrzymujemy:

$$4\left(\sin^6\alpha+\cos^6\alpha\right)=4\left(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right)\left(\left(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right)^2-3\sin^2\alpha\cos^2\alpha\right)=$$

$$=4\left(1-3\sin^2\alpha\cos^2\alpha\right).$$

Przekształcamy teraz prawą stronę równości, korzystając ze wzoru na cosinus kąta podwojonego.

$$1+3\cos^2 2\alpha=1+3\left(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\right)^2=1+3\left(\left(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha\right)^2-4\sin^2\alpha\cos^2\alpha\right)=$$

$$=1+3\left(1-4\sin^2\alpha\cos^2\alpha\right)=4-12\sin^2\alpha\cos^2\alpha=4\left(1-3\sin^2\alpha\cos^2\alpha\right).$$

To kończy dowód.

Zadanie 25. (0-2)

Rozwiąż nierówność $\cos 5x>\frac{1}{2}$ dla $-\pi\le x\le\pi$.

Rozwiązanie

Rozwiązujemy nierówność $\cos 5x>\frac{1}{2}$.

Zatem $-\frac{\pi}{3}+2k\pi<5x<\frac{\pi}{3}+2k\pi$, gdzie k jest liczbą całkowitą, czyli

$-\frac{\pi}{15}+\frac{2k\pi}{5}<x<\frac{\pi}{15}+\frac{2k\pi}{5}$, gdzie k jest liczbą całkowitą.

Rozwiązaniami tej nierówności dla $-\pi\le x\le\pi$ są:

$-\frac{13\pi}{15}<x<-\frac{11\pi}{15}$ lub $-\frac{7\pi}{15}<x<-\frac{5\pi}{15}$ lub $-\frac{\pi}{15}<x<\frac{\pi}{15}$ lub $\frac{5\pi}{15}<x<\frac{7\pi}{15}$ lub $\frac{11\pi}{15}<x<\frac{13\pi}{15}$.

Zadanie 26. (0-3)

Dany jest ostrosłup prawidłowy czworokątny. Kąt α jest kątem między dwiema sąsiednimi ścianami bocznymi. Kąt β jest kątem przy podstawie ściany bocznej (tzn. kątem między krawędzią podstawy i krawędzią boczną ostrosłupa).

Wykaż, że $\cos\alpha\cdot\mathrm{tg}^2\beta=-1$.

Rozwiązanie
Oznaczmy: a – długość krawędzi podstawy, h – wysokość ściany bocznej poprowadzona z wierzchołka podstawy, c – długość odcinka łączącego wierzchołek podstawy ze spodkiem wysokości h.

Na podstawie twierdzenia cosinusów mamy:

$$\left(a\sqrt{2}\right)^2 = h^2 + h^2 - 2h \cdot h \cdot \cos\alpha .$$

Stąd

$$\cos\alpha = \frac{h^2 - a^2}{h^2}.$$

Na podstawie twierdzenia Pitagorasa mamy

$$c^2 = a^2 - h^2 .$$

Ponadto

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{h}{c}, \text{ a stąd wynika, że } \operatorname{tg}^2\beta = \frac{h^2}{c^2} .$$

Obliczamy zatem

$$\cos\alpha \cdot \operatorname{tg}^2\beta = \frac{h^2 - a^2}{h^2} \cdot \frac{h^2}{c^2} = \frac{-\left(a^2 - h^2\right)}{c^2} = \frac{-c^2}{c^2} = -1.$$

To kończy dowód.

Zadanie 27. (0-4)

W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym krawędź podstawy ma długość a. Płaszczyzna przechodząca przez krawędź podstawy i środek wysokości tego ostrosłupa jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem α. Wyznacz objętość i pole powierzchni bocznej tego ostrosłupa.

Rozwiązanie
Wprowadzamy oznaczenia:
A, B, C - wierzchołki podstawy ostrosłupa
W - wierzchołek ostrosłupa
M - środek boku |AB|
O - spodek wysokości
S - środek wysokości |OW|

W trójkącie równobocznym ABC mamy:

$$|AB| = a, \quad |CM| = \frac{a\sqrt{3}}{2}, \quad |OM| = \frac{1}{3}|CM| = \frac{a\sqrt{3}}{6}.$$

Stąd

$$|OS| = |OM| \cdot \operatorname{tg}\alpha, \text{ czyli } |OW| = 2 \cdot |OS| = 2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{6} \cdot \operatorname{tg}\alpha = \frac{a\sqrt{3}}{3} \cdot \operatorname{tg}\alpha .$$

Zatem

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{3} \cdot \operatorname{tg}\alpha = \frac{a^3}{12} \cdot \operatorname{tg}\alpha .$$

Następnie

$$|MW|^2 = |OM|^2 + |OW|^2 = \frac{3a^2}{36} + \frac{3a^2}{9}\,\mathrm{tg}^2\alpha = \frac{a^2}{12} + \frac{a^2}{3}\,\mathrm{tg}^2\alpha = \frac{a^2}{12}\left(1+4\mathrm{tg}^2\alpha\right),$$

$$|MW| = \frac{a}{2\sqrt{3}}\sqrt{1+4\mathrm{tg}^2\alpha} = \frac{a\sqrt{3}}{6}\sqrt{1+4\mathrm{tg}^2\alpha}$$

i stąd otrzymujemy

$$P_b = 3\cdot\frac{1}{2}\cdot a\cdot\frac{a\sqrt{3}}{6}\cdot\sqrt{1+4\mathrm{tg}^2\alpha} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot\sqrt{1+4\mathrm{tg}^2\alpha}\,.$$

Zadanie 28. (0-4)

Dany jest sześcian $ABCDEFGH$ o krawędzi równej 1. Punkt S jest środkiem krawędzi DH. Odcinek DW jest wysokością ostrosłupa $ACSD$ opuszczoną z wierzchołka D na ścianę ACS. Oblicz długości odcinków AW, CW i SW.

Rozwiązanie

Łączymy punkty A i S, A i C oraz C i S. Niech T oznacza punkt przecięcia przekątnych AC i BD podstawy tego sześcianu.

Punkt S leży na krawędzi DH, więc $AS = CS$, a zatem trójkąt ACS, stanowiący podstawę ostrosłupa $ACSD$, jest trójkątem równoramiennym. Wynika stąd, że odcinek ST jest wysokością tego trójkąta. Długość odcinka ST obliczamy stosując twierdzenie Pitagorasa do trójkąta prostokątnego TSD:

$$|ST|^2 = |SD|^2 + |DT|^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2, \text{ czyli } |ST| = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Odcinek DW jest wysokością trójkąta prostokątnego TDS poprowadzoną do przeciwprostokątnej TS. Długość odcinka DW obliczymy zapisując na dwa sposoby pole trójkąta TDS:

$$\frac{1}{2}\cdot|SD|\cdot|TD| = \frac{1}{2}\cdot|ST|\cdot|DW|,$$

$$|DW| = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{6}.$$

Stąd i z twierdzenia Pitagorasa zastosowanego do trójkąta prostokątnego SWD wynika, że:

$$|SW| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{6}}{6}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{12}} = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

Wysokość ST trójkąta równoramiennego ACS jest zawarta w osi symetrii tego trójkąta. Wynika stąd, że $AW = CW$. Długość odcinka AW obliczamy stosując twierdzenie Pitagorasa do trójkąta prostokątnego ATW, w którym

$$|TW| = |ST| - |SW| = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Otrzymujemy zatem

$$|AW|^2=|AT|^2+|TW|^2=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2=\frac{5}{6},$$

skąd

$$|AW|=|CW|=\frac{\sqrt{30}}{6}.$$

Podsumowując, szukane odcinki mają długości: $|AW|=|CW|=\frac{\sqrt{30}}{6}$, $|SW|=\frac{\sqrt{3}}{6}$.

Zadanie 29. (0-6)

Kwadrat $ABCD$ o boku długości 1 jest podstawą ostrosłupa $ABCDS$. Odcinek HS jest wysokością ostrosłupa, przy czym punkt H dzieli przekątną AC podstawy w stosunku $2:1$. Krawędzie boczne BS i DS mają długość równą 1. Oblicz objętość tego ostrosłupa oraz długości krawędzi AS i CS.

Rozwiązanie

Niech T oznacza punkt przecięcia przekątnych AC i BD podstawy ostrosłupa

Ponieważ $|AC|=\sqrt{2}$, więc $|CH|=\frac{\sqrt{2}}{3}$ oraz $|HT|=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{3}=\frac{\sqrt{2}}{6}$. Trójkąt BSD jest równoramiennym trójkątem prostokątnym, dlatego że jego ramiona mają długości $|BS|=|DS|=1$, a podstawa $|BD|=\sqrt{2}$. Stąd wynika, że $|ST|=\frac{\sqrt{2}}{2}$. Obliczamy zatem wysokość HS tego ostrosłupa, stosując twierdzenie Pitagorasa do trójkąta SHT:

$$|HS|^2=|ST|^2-|HT|^2=\frac{1}{2}-\frac{1}{18}=\frac{4}{9},\text{ skąd wynika, że } |HS|=\frac{2}{3}.$$

Objętość V tego ostrosłupa jest zatem równa:

$$V=\frac{1}{3}\cdot 1\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{9}.$$

Pozostaje obliczyć jeszcze długości krawędzi bocznych AS i CS. Z twierdzenia Pitagorasa zastosowanego dwukrotnie, najpierw do trójkąta AHS, otrzymujemy

$$|AS|^2=|AH|^2+|HS|^2=\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{3},\text{ więc } |AS|=\frac{2\sqrt{3}}{3},$$

natomiast do trójkąta CHS

$$|CS|^2=|CH|^2+|HS|^2=\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{2}{3},\text{ skąd } |CS|=\frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Uwaga

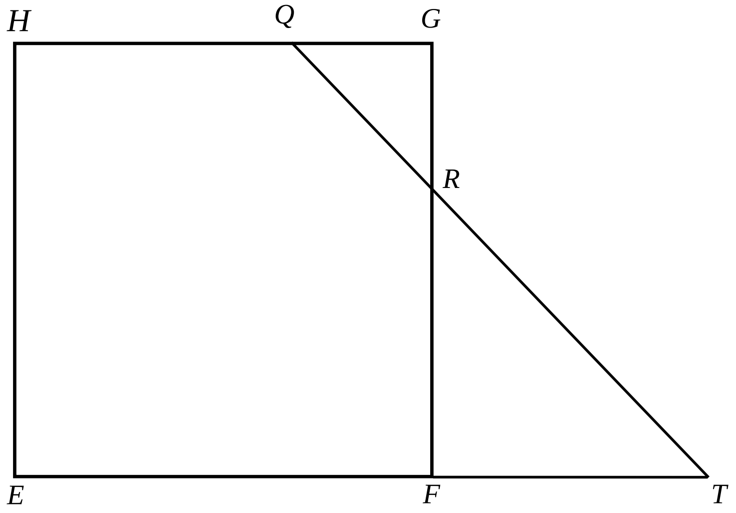
Rozważany ostrosłup nie jest prawidłowy, a wszystkie ściany boczne tego ostrosłupa są trójkątami równoramiennymi.

Zadanie 30. (0-4)

Dany jest sześcian $ABCDEFGH$, którego krawędź ma długość 15. Punkty Q i R dzielą krawędzie HG i FG w stosunku $2:1$, to znaczy $|HQ|=|FR|=10$. Płaszczyzna AQR przecina krawędzie DH i BF odpowiednio w punktach P i S. Oblicz długości odcinków DP i BS.

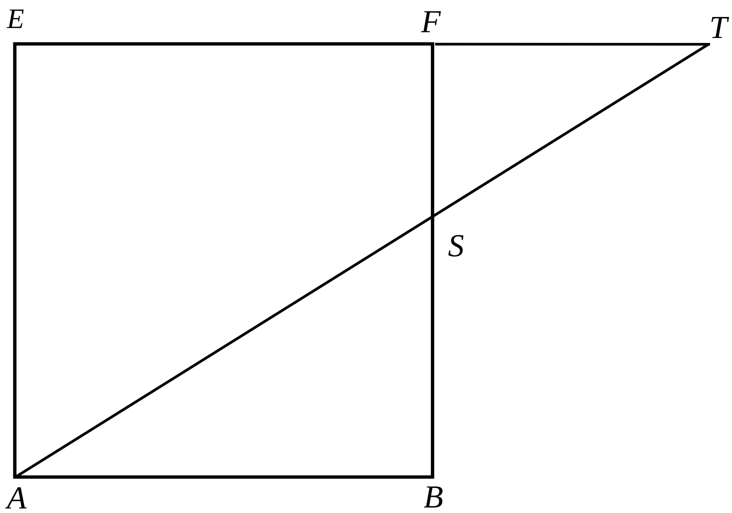
Rozwiązanie

Rozważamy kwadrat $EFGH$. Niech T oznacza punkt przecięcia przedłużeń odcinków QR i EF (zobacz rysunek).



Długości odcinków: |QG| = |GR| = 5, |RF| = |FT| = 10

Trójkąty prostokątne RFT i RGQ są podobne na mocy cechy kkk. Stąd wynika, że $|FT|=10$.
Teraz rozważamy kwadrat $ABFE$ (zobacz rysunek).



Długości odcinków: |FT| = 10, |FS| = x, |AB| = 15, |BS| = 15 - x

Trójkąty prostokątne ABS i TFS są podobne na mocy cechy kkk. Możemy więc zapisać równanie

$$\frac{|SF|}{|FT|}=\frac{|BS|}{|AB|}, \text{ a zatem } \frac{x}{10}=\frac{15-x}{15}.$$

Rozwiązujemy to równanie

$$15x = 150 - 10x, \quad x = 6.$$

Zatem długość szukanego odcinka BS jest równa 9. Ponieważ punkty B i D leżą symetrycznie względem płaszczyzny $ACGE$, więc $|DP| = |BS| = 9$.

Zadanie 31. (0-3)

Oblicz, ile jest wszystkich liczb siedmiocyfrowych, w zapisie których nie występuje zero i na dokładnie dwóch miejscach stoją cyfry parzyste.

Rozwiązanie

Rozwiązanie zadania składa się z trzech kroków. W kroku pierwszym obliczamy, na ile sposobów można wybrać dwa miejsca (spośród siedmiu), na których stoją cyfry parzyste. Ten krok możemy wykonać czterema sposobami.

- Możemy skorzystać ze wzoru na liczbę dwuelementowych kombinacji ze zbioru siedmioelementowego; wyraża się ona współczynnikiem dwumianowym $\binom{7}{2}$. Ten współczynnik możemy odczytać z trójkąta Pascala lub obliczyć ze wzoru

$$\binom{m}{n} = \frac{m!}{n!(m-n)!}.$$

Mamy zatem

$$\binom{7}{2} = \frac{7!}{2!(7-2)!} = \frac{7!}{2!5!} = \frac{6\cdot 7\cdot 5!}{2!5!} = \frac{6\cdot 7}{2} = 3\cdot 7 = 21.$$

- Możemy po prostu wszystkie te sposoby wyboru dwóch miejsc wypisać (kwadracik pusty oznacza miejsce dla cyfry nieparzystej, kwadracik pełny — dla parzystej):

1:	■	■	□	□	□	□	□
2:	■	□	■	□	□	□	□
3:	■	□	□	■	□	□	□
4:	■	□	□	□	■	□	□
5:	■	□	□	□	□	■	□
6:	■	□	□	□	□	□	■
7:	□	■	■	□	□	□	□
8:	□	■	□	■	□	□	□
9:	□	■	□	□	■	□	□
10:	□	■	□	□	□	■	□
11:	□	■	□	□	□	□	■
12:	□	□	■	■	□	□	□
13:	□	□	■	□	■	□	□
14:	□	□	■	□	□	■	□
15:	□	□	■	□	□	□	■
16:	□	□	□	■	■	□	□
17:	□	□	□	■	□	■	□
18:	□	□	□	■	□	□	■
19:	□	□	□	□	■	■	□
20:	□	□	□	□	■	□	■
21:	□	□	□	□	□	■	■

- Możemy także te możliwości zliczać: jeśli pierwsza (licząc od lewej strony) cyfra parzysta stoi na pierwszym miejscu, to drugą możemy ustawić na jednym z sześciu miejsc (od drugiego do siódmego); jeśli pierwsza (od lewej strony) cyfra parzysta stoi na drugim miejscu, to drugą możemy ustawić na jednym z pięciu miejsc i tak dalej. Wreszcie, jeśli pierwsza cyfra parzysta stoi na szóstym miejscu, to druga może stać tylko na miejscu siódmym. Łącznie mamy więc
$$6+5+4+3+2+1=21$$
sposobów wyboru dwóch miejsc dla cyfr parzystych.
- Możemy wreszcie rozumować następująco: jedną cyfrę parzystą możemy ustawić na jednym z 7 miejsc, drugą na jednym z sześciu miejsc. W ten sposób każde ustawienie policzyliśmy dwukrotnie, np. ustawienie

  □ □ ■ □ ■ □ □

  możemy otrzymać wybierając najpierw miejsce trzecie, a potem miejsce piąte lub wybierając najpierw miejsce piąte, a potem miejsce trzecie. Zatem liczba sposobów wyboru tych dwóch miejsc jest równa
$$\frac{7\cdot 6}{2}=7\cdot 3=21.$$

W kroku drugim obliczamy, na ile sposobów możemy na miejscach wybranych dla cyfr parzystych i nieparzystych napisać te cyfry. Skorzystamy dwukrotnie z reguły mnożenia. Najpierw na wybranych dwóch miejscach ustawiamy cyfry parzyste. Ponieważ w zapisie liczby nie występuje zero, więc na każdym miejscu mamy do wyboru cztery cyfry: 2, 4, 6, 8. Mamy zatem $4^2=16$ sposobów zapisania cyfr parzystych na wybranych miejscach. Wreszcie na każdym z pozostałych pięciu miejsc zapisujemy jedną z pięciu cyfr nieparzystych: 1, 3, 5, 7, 9. Mamy zatem $5^5=3125$ sposobów zapisania cyfr nieparzystych na pozostałych miejscach.
W kroku trzecim obliczamy, ile jest liczb siedmiocyfrowych spełniających warunki opisane w zadaniu. Korzystamy jeszcze raz z reguły mnożenia i otrzymujemy
$$21\cdot 4^2\cdot 5^5=21\cdot 16\cdot 3125=1\,050\,000$$
liczb.

Zadanie 32. (0-4)

Oblicz sumę wszystkich liczb trzycyfrowych zapisanych wyłącznie za pomocą cyfr 1, 2 i 3, wiedząc, że cyfry mogą się powtarzać.

Rozwiązanie
Zauważmy najpierw, że istnieje tylko 27 liczb trzycyfrowych, których cyfry są wybrane spośród cyfr 1, 2 i 3. Pierwszą cyfrę możemy bowiem wybrać na 3 sposoby, drugą także na trzy sposoby (cyfry mogą się powtarzać) i trzecią też na trzy sposoby. Najprostszy sposób rozwiązania zadania polega zatem na wypisaniu i dodaniu (np. na kalkulatorze) tych liczb. Oto one:
$$111 + 112 + 113 + 121 + 122 + 123 + 131 + 132 + 133 = 1098,$$
$$211 + 212 + 213 + 221 + 222 + 223 + 231 + 232 + 233 = 1998,$$
$$311 + 312 + 313 + 321 + 322 + 323 + 331 + 332 + 333 = 2898.$$

Suma wszystkich liczb jest równa
$$1098 + 1998 + 2898 = 2898.$$

Liczby te można łatwo dodać bez używania kalkulatora. Zauważmy, że sumy liczb w trzech wierszach są równe:

$$9\cdot 100 + (11 + 12 + 13 + 21 + 22 + 23 + 31 + 32 + 33) = 900 + 198 = 1098,$$

$$9\cdot 200 + (11 + 12 + 13 + 21 + 22 + 23 + 31 + 32 + 33) = 1800 + 198 = 1998,$$

$$9\cdot 300 + (11 + 12 + 13 + 21 + 22 + 23 + 31 + 32 + 33) = 2700 + 198 = 2898.$$

Dodawanie

$$11 + 12 + 13 + 21 + 22 + 23 + 31 + 32 + 33 = 198$$

może być wykonane w pamięci; pozostałe dodawania można łatwo wykonać też w pamięci lub pisemnie. Najważniejsze było zauważenie, że we wszystkich dodawaniach występowała ta sama suma liczb dwucyfrowych i zmieniały się tylko sumy setek. Ta obserwacja będzie podstawą dla drugiego sposobu rozwiązania.

Obliczając sumę wszystkich 27 liczb, każdą z tych liczb zapiszemy w postaci

$$a\cdot 100+b\cdot 10+c$$

i będziemy oddzielnie dodawać wielokrotności 100, oddzielnie wielokrotności 10 i wreszcie oddzielnie cyfry jedności. Policzmy, w ilu liczbach jedynka występuje na pierwszym miejscu (tzn. jako cyfra setek). Otóż na drugim miejscu możemy postawić jedną z trzech cyfr i na trzecim też jedną z trzech cyfr. Zatem jedynka jest na pierwszym miejscu w dziewięciu liczbach. W sumie wszystkich dwudziestu siedmiu liczb dziewięć razy wystąpi składnik 100. Podobnie 9 razy wystąpi składnik 200 i 9 razy wystąpi składnik 300. Zatem składniki postaci $a\cdot 100$ dadzą sumę

$$9\cdot 100 + 9\cdot 200 + 9\cdot 300 = 9\cdot 100\cdot (1 + 2 + 3) = 9\cdot 100\cdot 6 = 5400.$$

Tak samo pokazujemy, że każda cyfra wystąpi 9 razy na drugim miejscu (tzn. jako cyfra dziesiątek). Zatem składniki postaci $b\cdot 10$ dadzą sumę

$$9\cdot 10 + 9\cdot 20 + 9\cdot 30 = 9\cdot 10\cdot (1 + 2 + 3) = 9\cdot 10\cdot 6 = 540.$$

Wreszcie tak samo pokazujemy, że każda cyfra wystąpi 9 razy jako cyfra jedności. Suma cyfr jedności jest zatem równa

$$9\cdot 1 + 9\cdot 2 + 9\cdot 3 = 9\cdot (1 + 2 + 3) = 9\cdot 6 = 54.$$

Suma wszystkich liczb wynosi zatem.

$$5400 + 540 + 54 = 5994.$$

Zadanie 33. (0-7)

Oblicz, ile jest wszystkich liczb ośmiocyfrowych, których iloczyn cyfr jest równy 24.

Rozwiązanie

Rozkładamy liczbę 24 na czynniki pierwsze $24 = 3\cdot 2\cdot 2\cdot 2$.

Mamy więc pięć, parami wykluczających się możliwości, w których iloczyn cyfr liczby ośmiocyfrowej jest równy 24:

1. Wśród cyfr tej liczby są trzy dwójki, jedna trójka i cztery jedynki ($24 = 3\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1$). Liczbę takich liczb można obliczyć na przykład tak:
   - $8\cdot\binom{7}{3} = 280$ — wybieramy jedno miejsce z ośmiu dla trójki a następnie trzy miejsca z pozostałych siedmiu dla dwójki

   albo tak:
   - $\binom{8}{4}\cdot 4 = 280$ — wybieramy cztery miejsca dla cyfr różnych od jedynki, a następnie spośród nich wybieramy miejsce dla trójki,

   albo tak:

- $\frac{8!}{3!\cdot 4!}=280$ — ustawiamy na wszystkie możliwe sposoby cyfry liczby 32221111.

2. Wśród cyfr tej liczby są trójka, czwórka, dwójka i pięć jedynek ($24=3\cdot 4\cdot 2\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1$). Liczbę takich liczb można obliczyć na przykład tak:
   - $8\cdot 7\cdot 6=336$ — wybieramy miejsca dla cyfr: trzy, cztery, dwa

   albo tak:
   - $\binom{8}{3}\cdot 3!=336$ — wybieramy trzy miejsca dla cyfr: trzy, cztery, dwa, następnie przestawiamy te cyfry między sobą,

   albo tak:
   - $\frac{8!}{5!}=336$ — ustawiamy na wszystkie możliwe sposoby cyfry liczby 32411111.
3. Wśród cyfr tej liczby są trójka, ósemka i sześć jedynek ($24=3\cdot 8\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1$). Liczbę takich liczb można obliczyć na przykład tak:
   - $8\cdot 7=56$ — wybieramy miejsce dla trójki i z pozostałych dla ósemki

   albo tak:
   - $\binom{8}{2}\cdot 2=56$ — wybieramy dwa miejsca z ośmiu dla trójki i ósemki, następnie wybieramy miejsce dla każdej z nich,

   albo tak:
   - $\frac{8!}{6!}=56$ — ustawiamy na wszystkie możliwe sposoby cyfry liczby 38111111.
4. Wśród cyfr tej liczby są szóstka, czwórka i sześć jedynek ($24=6\cdot 4\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1$). Liczbę takich liczb można obliczyć na przykład tak:
   - $8\cdot 7=56$ — wybieramy miejsce dla szóstki i czwórki

   albo tak:
   - $\binom{8}{2}\cdot 2=56$ — wybieramy dwa miejsca z ośmiu dla szóstki i czwórki, następnie wybieramy miejsce dla każdej z nich,

   albo tak:
   - $\frac{8!}{6!}=56$ — ustawiamy na wszystkie możliwe sposoby cyfry liczby 64111111.
5. Wśród cyfr tej liczby są dwie dwójki, jedna szóstka i pięć jedynek($24=6\cdot 2\cdot 2\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1$). Liczbę takich liczb można obliczyć na przykład tak:
   - $8\cdot\binom{7}{2}=168$ — wybieramy miejsce dla szóstki, następnie dwa miejsca z siedmiu dla dwójek

   albo tak:
   - $\binom{8}{3}\cdot 3=168$ — wybieramy trzy miejsca z ośmiu dla szóstki i dwóch dwójek, następnie spośród nich wybieramy miejsce dla szóstki,

   albo tak:
   - $\frac{8!}{2!\cdot 5!}=168$ — ustawiamy na wszystkie możliwe sposoby cyfry liczby 62211111.

Zatem wszystkich liczb ośmiocyfrowych, których iloczyn cyfr jest równy 24, jest

$$280+336+56+56+168=896.$$

Zadanie 34. (0-6)

Oblicz, ile jest wszystkich liczb stucyfrowych o sumie cyfr równej 5, w zapisie których występują tylko cyfry 0, 1, 3, 5.

Rozwiązanie
Wszystkie liczby stucyfrowe o sumie cyfr równej 5, w zapisie których występują tylko cyfry 0, 1, 3, 5 możemy podzielić na 4 grupy w zależności od tego, jaka cyfra stoi na pierwszym miejscu liczby:

1. Liczba $5000...000$, w której po cyfrze 5 następuje 99 zer. Jest jedna taka liczba.
2. Liczby postaci $3000...1...000...1...000$, w których po cyfrze 3 występuje 97 cyfr 0 i dwie cyfry 1, stojące na dwóch miejscach wybranych z 99 możliwych miejsc. Jest $\binom{99}{2} = \frac{99 \cdot 98}{2} = 99 \cdot 49 = 4851$ takich liczb.
3. Liczby postaci $1000...3...000...1...000$ lub $1000...1...000...3...000$, w których po cyfrze 1 występuje 97 cyfr 0 oraz cyfry 1 i 3 (w dowolnej kolejności), stojące na dwóch miejscach wybranych z 99 możliwych miejsc. Jest $99 \cdot 98 = 9702$ takich liczb.
4. Liczby postaci $1000...1...000...1...000...1...000...1...000$, w których po cyfrze 1 występuje 95 cyfr 0 i cztery cyfry 1, stojące na czterech miejscach wybranych z 99 możliwych miejsc. Jest $\binom{99}{4} = \frac{99 \cdot 98 \cdot 97 \cdot 96}{24} = 33 \cdot 49 \cdot 97 \cdot 24 = 3\,764\,376$ takich liczb.

Zatem wszystkich liczb stucyfrowych o sumie cyfr równej 5, w zapisie których występują tylko cyfry 0, 1, 3, 5, jest

$$1 + 4851 + 9702 + 3\,764\,376 = 3\,778\,930.$$

Zadanie 35. (0-3)

Doświadczenie losowe polega na tym, że losujemy jednocześnie dwie liczby ze zbioru $\{1, 2, 3, ..., 12, 13\}$. Oblicz prawdopodobieństwo warunkowe, że wśród wylosowanych liczb będzie liczba 8, pod warunkiem, że suma wylosowanych liczb będzie nieparzysta.

Rozwiązanie
Zdarzeniami elementarnymi są wszystkie dwuelementowe podzbiory (pary nieuporządkowane, kombinacje) zbioru $\{1, 2, 3, ..., 12, 13\}$. Jest to model klasyczny.

Wprowadzamy oznaczenia:
A — wśród wylosowanych liczb będzie liczba 8,
B — suma wylosowanych liczb będzie nieparzysta.

Mamy obliczyć $P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{|A \cap B|}{|B|}$.

Zdarzeniu B sprzyjają kombinacje złożone z jednej liczby nieparzystej i jednej parzystej, $|B| = 7 \cdot 6 = 42$,

Zdarzeniu $A \cap B$ sprzyjają kombinacje złożone z liczby 8 i jednej liczby nieparzystej, $|A \cap B| = 1 \cdot 7 = 7$,

stąd

$$P(A \mid B) = \frac{7}{42} = \frac{1}{6}.$$

Zatem prawdopodobieństwo, że wśród wylosowanych liczb będzie liczba 8, pod warunkiem, że suma wylosowanych liczb będzie nieparzysta, jest równe $\frac{1}{6}$.

Zadanie 36. (0-3)

Niech A, B będą zdarzeniami losowymi zawartymi w Ω. Wykaż, że jeżeli $P(A)=0,7$ i $P(B)=0,8$, to $P(A|B)\geq 0,625$.
$P\left(A|B\right)$ oznacza prawdopodobieństwo warunkowe.

Rozwiązanie
$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$.
Wykażemy najpierw, że jeżeli $P(A)=0,7$ i $P(B)=0,8$, to $P(A\cap B)\geq 0,5$.
Wiemy, że $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$ oraz $P(A\cup B)\leq 1$.
Mamy więc: $1\geq P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$, stąd $P(A\cap B)\geq P(A)+P(B)-1$, czyli $P(A\cap B)\geq 0,5$.
Stąd $P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}\geq\frac{0,5}{0,8}=0,625$.

Zadanie 37. (0-4)

Wybieramy losowo jedną liczbę ze zbioru $\{1,2,3\}$ i gdy otrzymamy liczbę n, to rzucamy n razy symetryczną monetą. Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania co najmniej jednego orła. Wynik przedstaw w postaci ułamka zwykłego nieskracalnego.

Rozwiązanie
Wprowadzamy oznaczenia dla zdarzeń:
B_1 - wylosujemy liczbę 1,
B_2 - wylosujemy liczbę 2,
B_3 - wylosujemy liczbę 3,
A - otrzymamy co najmniej jednego orła.
Zdarzenia B_1, B_2 i B_3 spełniają założenia twierdzenia o prawdopodobieństwie całkowitym, ponieważ

$$B_1\cup B_2\cup B_3=\Omega,\ B_1\cap B_2=B_1\cap B_3=B_2\cap B_3=\varnothing,\ P(B_1)=P(B_2)=P(B_3)=\frac{1}{3}>0.$$

Stosując twierdzenie o prawdopodobieństwie całkowitym do zdarzenia A, otrzymujemy
$P(A)=P(A|B_1)P(B_1)+P(A|B_2)P(B_2)+P(A|B_3)P(B_3)$.
Ponieważ $P(A|B_1)=\frac{1}{2}$, $P(A|B_2)=\frac{3}{4}$, $P(A|B_3)=\frac{7}{8}$, więc
$P(A)=P(A|B_1)P(B_1)+P(A|B_2)P(B_2)+P(A|B_3)P(B_3)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3}+\frac{7}{8}\cdot\frac{1}{3}=\frac{17}{24}$.
Zatem prawdopodobieństwo otrzymania co najmniej jednego orła jest równe $\frac{17}{24}$.

Uwaga
Zdający może rozwiązać zadanie za pomocą drzewa.

Zadanie 38. (0-2)

Niech A, B będą zdarzeniami losowymi zawartymi w Ω. Wykaż, że jeżeli $P(A \cap B) = P(A)P(B)$, to $P(A \cap B') = P(A)P(B')$.
B' oznacza zdarzenie przeciwne do zdarzenia B.

Rozwiązanie

$$P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B) = P(A) - P(A)P(B) = P(A)(1 - P(B)) = P(A)P(B')$$