NIERÓWNOŚCI CYKLOMETRYCZNE

Wśród wielu typów nierówności rozwiązywanych przez uczniów liceów ogólnokształcących, na uwagę zasługują również nierówności cyklometryczne.

W okresie poprzedzającym wprowadzenie reformy edukacji narodowej w 1999 roku, tematykę tę można było realizować podczas standardowych jednostek lekcyjnych, w klasach o rozszerzonym zakresie nauczania matematyki. Obecnie, po zredukowaniu okresu nauki w liceach ogólnokształcących do trzech lat, powyższemu zagadnieniu można poświęcić uwagę w ramach zajęć matematycznego koła przedmiotowego.

Rozwiązywanie nierówności cyklometrycznych stanowi sposobność utrwalenia tożsamości trygonometrycznych oraz stwarza możliwość zapoznania się z podstawowymi tożsamościami cyklometrycznymi. Implikuje również konieczność określania monotoniczności funkcji trygonometrycznych w odpowiednich przedziałach.

Rozpatrzmy nierówność: $\arccos\frac{3}{5}x+\arccos\frac{12}{13}x\geq\arccos\frac{16}{65}x$.

Ustalamy dziedzinę nierówności:

$$D:\begin{cases}-1\leq\frac{3}{5}x\leq 1\\ -1\leq\frac{12}{13}x\leq 1\\ -1\leq\frac{16}{65}x\leq 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-\frac{5}{3}\leq x\leq\frac{5}{3}\\ -\frac{13}{12}\leq x\leq\frac{13}{12}\\ -\frac{65}{16}\leq x\leq\frac{65}{16}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\in\left\langle-\frac{5}{3};\frac{5}{3}\right\rangle\\ x\in\left\langle-\frac{13}{12};\frac{13}{12}\right\rangle\\ x\in\left\langle-\frac{65}{16};\frac{65}{16}\right\rangle\end{cases}\Leftrightarrow x\in\left\langle-\frac{13}{12};\frac{13}{12}\right\rangle$$

Zbiorem wartości funkcji $f(x)=\arccos x$ jest przedział $\langle 0;\Pi\rangle$.

Analizując powyższą nierówność należy zatem rozpatrzyć dwa przypadki.

<u>Przypadek I</u>

Zakładamy, że lewa strona nierówności jest wyrażeniem należącym do przedziału $\langle 0;\Pi\rangle$.

Spełniony być musi wówczas układ warunków:

$$\begin{cases}\arccos\frac{3}{5}x+\arccos\frac{12}{13}x\geq 0\\ \arccos\frac{3}{5}x+\arccos\frac{12}{13}x\leq\Pi\end{cases}$$

Pierwsza z tych nierówności jest nierównością tożsamościową.

Pozostaje rozwiązać nierówność:

$$\arccos\frac{3}{5}x + \arccos\frac{12}{13}x \le \Pi .$$

Po lewej stronie nierówności pozostawiamy jedno z wyrażeń cyklometrycznych:

$$\arccos\frac{3}{5}x \le \Pi - \arccos\frac{12}{13}x .$$

Obie strony nierówności należą do przedziału $\langle 0;\Pi\rangle$. Zatem obie strony można traktować jako argumenty funkcji $g(x) = \cos x$ w przedziale $\langle 0;\Pi\rangle$. Ze względu na to, że funkcja g w danym przedziale jest malejąca, po przyłożeniu operatora funkcyjnego g do obu stron nierówności, należy zmienić zwrot nierówności na przeciwny. Otrzymujemy:

$$\cos(\arccos\frac{3}{5}x) \ge \cos(\prod - \arccos\frac{12}{13}x)$$

Korzystając ze wzoru redukcyjnego mamy:

$$\cos(\arccos\frac{3}{5}x) \ge -\cos(\arccos\frac{12}{13}x)$$

Czyli:

$$\frac{3}{5}x \ge -\frac{12}{13}x \Leftrightarrow \frac{3}{5}x + \frac{12}{13}x \ge 0 \Leftrightarrow \frac{39}{65}x + \frac{60}{65}x \ge 0 \Leftrightarrow \frac{99}{65}x \ge 0 \Leftrightarrow x \ge 0 \Leftrightarrow x \in \langle 0;+\infty)$$

Uwzględniając dziedzinę otrzymujemy warunek: $x \in \left\langle 0;\frac{13}{12}\right\rangle$.

Gdy warunek ten jest spełniony, obie strony wyjściowej nierówności należą do przedziału $\langle 0;\Pi\rangle$. Możemy zatem do obu stron przyłożyć operator funkcyjny g, pamiętając o zmianie zwrotu nierówności. Otrzymujemy:

$$\cos(\arccos\frac{3}{5}x + \arccos\frac{12}{13}x) \le \cos(\arccos\frac{16}{65}x) .$$

Stosujemy wzór wyrażający cosinus sumy kątów.

$$\cos(\arccos\frac{3}{5}x)\cos(\arccos\frac{12}{13}x) - \sin(\arccos\frac{3}{5}x)\sin(\arccos\frac{12}{13}x) \le \frac{16}{65}x .$$

Korzystamy z tożsamości cyklometrycznej:

$$\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$$

Otrzymujemy nierówność:

$$\frac{3}{5}x\cdot\frac{12}{13}x-\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}x\right)^2}\cdot\sqrt{1-\left(\frac{12}{13}x\right)^2}\le\frac{16}{65}x\Leftrightarrow\frac{36}{65}x^2-\sqrt{1-\frac{9}{25}x^2}\cdot\sqrt{1-\frac{144}{169}x^2}\le\frac{16}{65}x\Leftrightarrow$$

$$\frac{36}{65}x^2-\sqrt{\frac{25-9x^2}{25}}\cdot\sqrt{\frac{169-144x^2}{169}}\le\frac{16}{65}x\Leftrightarrow\frac{36}{65}x^2-\frac{\sqrt{25-9x^2}}{5}\cdot\frac{\sqrt{169-144x^2}}{13}\le\frac{16}{65}x$$

Mnożymy obie strony nierówności przez 65.

$$36x^2-\sqrt{(25-9x^2)(169-144x^2)}\le 16x$$

Dokonujemy izolacji wyrażenia pierwiastkowego, zmieniając jednocześnie znaki w obu czynnikach wyrażenia podpierwiastkowego na przeciwne.

$$\sqrt{(9x^2-25)(144x^2-169)}\ge 36x^2-16x$$

Rozwiązujemy nierówność pierwiastkową rozpatrując dwa przypadki:

$$\begin{cases}36x^2-16x\ge 0\\ (9x^2-25)(144x^2-169)\ge(36x^2-16x)^2\end{cases}\quad\vee\quad 36x^2-16x<0\quad\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}4x(9x-4)\ge 0\\ 1296x^4-1521x^2-3600x^2+4225\ge 1296x^4-1152x^3+256x^2\end{cases}\quad\vee\quad 4x(9x-4)<0\quad\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}x\in\left(-\infty;0\right\rangle\cup\left\langle\tfrac{4}{9};+\infty\right)\\ 1152x^3-5377x^2+4225\ge 0\end{cases}\quad\vee\quad x\in\left(0;\frac{4}{9}\right)$$

Dostrzegamy, iż liczba $x_0=1$ jest pierwiastkiem wielomianu stopnia trzeciego. Zatem, na mocy twierdzenia Bezout, jest on podzielny przez dwumian $P(x)=x-1$.

Rozkładamy na czynniki dany wielomian.

$$W(x)=1152x^3-5377x^2+4225=1152x^3-1152x^2-4225x^2+4225x-4225x+4225=$$
$$=1152x^2(x-1)-4225x(x-1)-4225(x-1)=(x-1)(1152x^2-4225x-4225)$$

Wyznaczamy wyróżnik trójmianu kwadratowego.

$$\Delta=(-4225)^2-4*1152*(-4225)=4225^2+4608*4225=4225*(4225+4608)=$$
$$=4225*8833=25*169*121*73$$

$$\sqrt{\Delta}=\sqrt{25*169*121*73}=5*13*11\sqrt{73}=715\sqrt{73}$$

Obliczamy miejsca zerowe trójmianu kwadratowego:

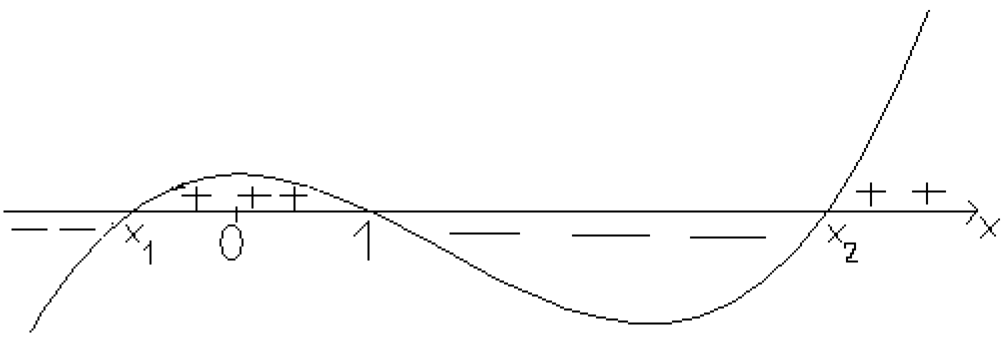
$$x_1=\frac{4225-715\sqrt{73}}{2304}\approx-0{,}82\qquad x_2=\frac{4225+715\sqrt{73}}{2304}\approx 4{,}49$$

Zatem $W(x)=1152(x-1)\left(x-\frac{4225-715\sqrt{73}}{2304}\right)\left(x-\frac{4225+715\sqrt{73}}{2304}\right)$

Otrzymujemy alternatywę:

$$\begin{cases} x\in\left(-\infty;0\right\rangle\cup\left\langle\frac{4}{9};+\infty\right) \\ 1152(x-1)\left(x-\frac{4225-715\sqrt{73}}{2304}\right)\left(x-\frac{4225+715\sqrt{73}}{2304}\right)\geq 0 \end{cases} \quad\vee\quad x\in\left(0;\frac{4}{9}\right)$$

Rozwiązujemy nierówność stopnia trzeciego metodą graficzną szkicując przybliżony wykres wielomianu.



$$\begin{cases} x\in\left(-\infty;0\right\rangle\cup\left\langle\frac{4}{9};+\infty\right) \\ x\in\left\langle\frac{4225-715\sqrt{73}}{2304};1\right\rangle\cup\left\langle\frac{4225+715\sqrt{73}}{2304};+\infty\right) \end{cases} \quad\vee\quad x\in\left(0;\frac{4}{9}\right) \quad\Leftrightarrow$$

$$x\in\left\langle\frac{4225-715\sqrt{73}}{2304};0\right\rangle\cup\left\langle\frac{4}{9};1\right\rangle\cup\left\langle\frac{4225+715\sqrt{73}}{2304};+\infty\right) \quad\vee\quad x\in\left(0;\frac{4}{9}\right) \quad\Leftrightarrow$$

$$x\in\left\langle\frac{4225-715\sqrt{73}}{2304};1\right\rangle\cup\left\langle\frac{4225+715\sqrt{73}}{2304};+\infty\right)$$

Uwzględniając warunek spełniony w I przypadku otrzymujemy: $x\in\langle 0;1\rangle$.

<u>Przypadek II</u>

Zakładamy, że lewa strona nierówności jest wyrażeniem należącym do przedziału $(\pi;+\infty)$.

Spełniony musi być wówczas warunek:

$$\arccos\frac{3}{5}x+\arccos\frac{12}{13}x>\pi.$$

Po lewej stronie nierówności pozostawiamy jedno z wyrażeń cyklometrycznych.

$$\arccos\frac{3}{5}x>\pi-\arccos\frac{12}{13}x.$$

Obie strony nierówności należą do przedziału $\langle 0;\pi\rangle$. Zatem obie strony można traktować jako argumenty funkcji $g(x)=\cos x$ w przedziale $\langle 0;\pi\rangle$. Ze względu na to , że funkcja g w danym przedziale jest malejąca, po przyłożeniu operatora funkcyjnego g do obu stron nierówności, należy zmienić zwrot nierówności na przeciwny. Otrzymujemy:

$$\cos\left(\arccos\frac{3}{5}x\right)<\cos\left(\pi-\arccos\frac{12}{13}x\right)$$

Korzystając ze wzoru redukcyjnego mamy:

$$\cos\left(\arccos\frac{3}{5}x\right)<-\cos\left(\arccos\frac{12}{13}x\right)$$

Czyli:

$$\frac{3}{5}x<-\frac{12}{13}x \Leftrightarrow \frac{3}{5}x+\frac{12}{13}x<0 \Leftrightarrow \frac{39}{65}x+\frac{60}{65}x<0 \Leftrightarrow \frac{99}{65}x<0 \Leftrightarrow x<0 \Leftrightarrow x\in(-\infty;0)$$

Uwzględniając dziedzinę otrzymujemy warunek: $x\in\left\langle -\frac{13}{12};0\right)$.

Gdy warunek ten jest spełniony, lewa strona wyjściowej nierówności należy do przedziału $(\pi;+\infty)$, zaś prawa strona należy do przedziału $\langle 0;\pi\rangle$. Zatem nierówność jest spełniona tożsamościowo.

Biorąc pod uwagę oba przypadki otrzymujemy alternatywę:

$x\in\langle 0;1\rangle \vee x\in\left\langle -\frac{13}{12};0\right)$. Jest ona równoważna warunkowi: $x\in\left\langle -\frac{13}{12};1\right\rangle$.

Przedział ten stanowi zbiór wszystkich rozwiązań wyjściowej nierówności.

Analogicznie możemy rozwiązać nierówność:

$$\arcsin\frac{3}{5}x+\arcsin\frac{4}{5}x\le\arcsin x.$$

Musimy jedynie pamiętać, że zbiorem wartości funkcji $h(x)=\arcsin x$ jest przedział $\left\langle -\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right\rangle$ oraz, że funkcja $k(x)=\sin x$ jest rosnąca w przedziale $\left\langle -\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right\rangle$, co skutkuje brakiem zmiany zwrotu nierówności podczas przykładania operatora funkcyjnego k do obu jej stron.

Zbiorem wszystkich rozwiązań powyższej nierówności jest $\langle -1;0\rangle\cup\{1\}$.

Poniżej zamieszczam zestaw nierówności cyklometrycznych, o zróżnicowanym stopniu trudności, wraz z rozwiązaniami.

a) $3\arcsin\sqrt{x} - \Pi < 0$
$Odp: x \in \left\langle 0; \frac{3}{4} \right)$

b) $6\arcsin(x^2 - 6x + 8{,}5) - \Pi \geq 0$
$Odp: x \in \left\langle \frac{6-\sqrt{6}}{2}; 2 \right\rangle \cup \left\langle 4; \frac{6+\sqrt{6}}{2} \right\rangle$

c) $6\arccos\sqrt{2x} - \Pi \geq 0$
$Odp: x \in \left\langle 0; \frac{3}{8} \right\rangle$

d) $4arctg(x^2 - 3x - 3) - \Pi < 0$
$Odp: x \in (-1; 4)$

e) $4arcctg(x+4)^2 - \Pi \leq 0$
$Odp: x \in \left(-\infty; -5\right\rangle \cup \left\langle -3; +\infty\right)$

f) $2arctg\frac{1}{2} - arctgx > \frac{\pi}{4}$
$Odp: x \in \left(-\infty; \frac{1}{7}\right)$

g) $2\arccos x - \arcsin x < \frac{\pi}{4}$
$Odp: x \in \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; 1\right\rangle$

h) $\arccos x - 2\arcsin x \geq -\frac{\pi}{4}$
$Odp: x \in \left\langle -1; \frac{\sqrt{2}}{2} \right\rangle$

i) $arcctgx < arctgx$
$Odp: x \in (1; +\infty)$

j) $3arctgx + arcctgx \leq \frac{\pi}{2}$
$Odp: x \in \left(-\infty; 0\right\rangle$

k) $2arctgx - arcctgx > \frac{\pi}{2}$
$Odp: x \in \left(\sqrt{3}; +\infty\right)$

l) $\arcsin\frac{9}{41}x + \arcsin\frac{40}{41}x > \frac{\pi}{2}$
$Odp: x \in \left(1; \frac{41}{40}\right\rangle$

ł) $\arccos\frac{5}{13}x + \arccos\frac{12}{13}x \leq \frac{\pi}{2}$
$Odp: x \in \left\langle 1; \frac{13}{12}\right\rangle$

m) $arctg\,2x + arctg\,5x < \frac{\pi}{2}$

$Odp: x \in \left(-\infty; \frac{\sqrt{10}}{10}\right)$

n) $arcctg\,3x + arcctg\,4x \geq \frac{\pi}{2}$

$Odp: x \in \left(-\infty; \frac{\sqrt{3}}{6}\right\rangle$

o) $\arcsin\left(x\sqrt{2}\right) + \arcsin x \geq \frac{\pi}{2}$

$Odp: x \in \left\langle \frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{\sqrt{2}}{2} \right\rangle$

p) $\arccos\left(x\sqrt{3}\right) + \arccos x > \frac{\pi}{2}$

$Odp: x \in \left\langle -\frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{1}{2}\right)$

q) $arctg\left(x\sqrt{7}\right) + arctgx \leq \frac{\pi}{2}$

$Odp: x \in \left(-\infty; \frac{\sqrt[4]{343}}{7}\right\rangle$

r) $arcctg\left(x\sqrt{6}\right) + arcctgx < \frac{\pi}{2}$

$Odp: x \in \left(\frac{\sqrt[4]{216}}{6}; +\infty\right)$

s) $\arcsin(1 - x) - 2\arcsin x \leq \frac{\pi}{2}$

$Odp: x \in \langle 0;1 \rangle$

t) $2\arcsin x + \arccos(1 - x) \leq 0$

$Odp: x = 0$

u) $4\arcsin x + \arccos\left(1 - x^2\right) < 0$

$Odp: x \in \langle -1; 0)$

v) $arctg(x + 2) - arctg(x + 1) \geq \frac{\pi}{4}$

$Odp: x \in \langle -2; -1 \rangle$

w) $\arcsin \frac{2}{3\sqrt{x}} - \arcsin\sqrt{1 - x} > \arcsin\frac{1}{3}$

$Odp: x \in \left\langle \frac{4}{9}; \frac{2}{3} \right) \cup \left(\frac{2}{3}; 1\right\rangle$

x) $arctg\sqrt{x^2 + x} + \arcsin\sqrt{x^2 + x + 1} \leq \frac{\pi}{2}$

$Odp: x \in \{-1, 0\}$

y) $arcctg\sqrt{x} + \arccos\sqrt{x - 1} < \frac{\pi}{2}$

$Odp: x \in \left(\sqrt{2}; 2\right\rangle$

z) $\arccos\frac{1}{2}x + \arccos\frac{3}{4}x > \arccos x$

$Odp: x \in \langle -1; 1 \rangle$