RÓWNANIA TRYGONOMETRYCZNE Z PARAMETREM

Do grupy zagadnień matematycznych, w których występuje pojęcie parametru, należą równania trygonometryczne.

Rozpatrywanie równań trygonometrycznych z parametrem stwarza możliwość powtórzenia i utrwalenia tożsamości trygonometrycznych oraz, w niektórych przypadkach, również tożsamości cyklometrycznych. Problematyka ta stanowi także sposobność do opanowania umiejętności wyznaczania zbioru wartości funkcji złożonych.

W przypadku powyższych równań treść zadania obliguje nas najczęściej do wyznaczenia zbioru tych wszystkich wartości parametru, dla których dane równanie posiada rozwiązanie.

Rozpatrzmy kilka przykładów tego typu zadań.

Przykład 1.

Dla jakich wartości parametru m równanie:

$\sin^4 x - \cos^4 x = 6m - \cos^2 2x$ posiada rozwiązanie?

Wyznaczamy dziedzinę równania:

$$D: x \in R$$

Rozkładamy lewą stronę równania na czynniki, korzystając ze wzoru skróconego mnożenia.

$$(\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^2 x - \cos^2 x) = 6m - \cos^2 2x$$

Wnętrze pierwszego nawiasu stanowi jedynkę trygonometryczną, zaś wyrażenie występujące w drugim nawiasie jest przeciwne do cosinusa dwukrotności kąta x.

Otrzymujemy:

$$-\cos 2x = 6m - \cos^2 2x$$

Przenosimy składniki zawierające zmienną na lewą stronę równania, zaś składniki zawierające parametr na prawą stronę.

$$(*)\ \cos^2 2x - \cos 2x = 6m$$

Definiujemy funkcję złożoną f.

$$f(x) = \cos^2 2x - \cos 2x$$

Musimy wyznaczyć zbiór wartości tej funkcji.

Rozpoczynamy od rozpatrzenia własności funkcji wewnętrznej $g(x) = \cos 2x$. Funkcja ta jest funkcją ograniczoną i bez względu na okres zasadniczy przyjmuje wszystkie wartości z przedziału $\langle -1;1 \rangle$.

Przechodzimy do dyskusji własności funkcji zewnętrznej $h(t) = t^2 - t.$ Interesuje nas obraz przedziału $\langle -1;1 \rangle$ w odwzorowaniu h.

Obliczamy miejsca zerowe tej funkcji.

$$h(t) = 0 \Leftrightarrow t^2 - t = 0 \Leftrightarrow t(t-1) = 0 \Leftrightarrow t = 0 \vee t = 1$$

Obliczamy wartość wyróżnika trójmianu kwadratowego.

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0 = 1$$

Wyznaczamy współrzędne wierzchołka paraboli.

$$t_w = -\tfrac{b}{2a} = \tfrac{1}{2}$$

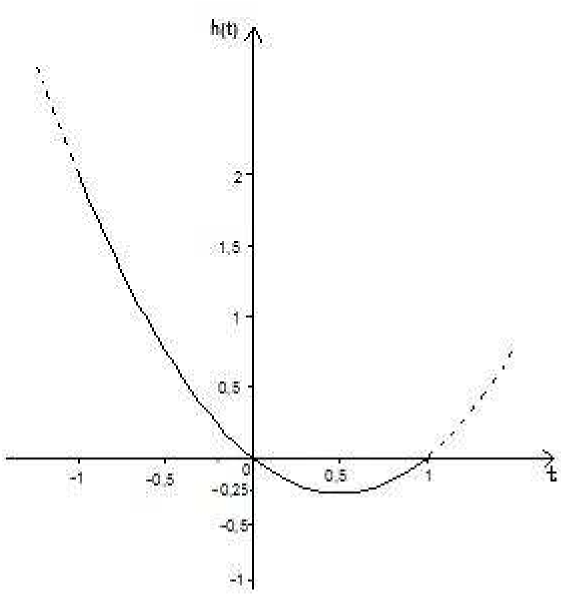
$$y_w = -\tfrac{\Delta}{4a} = -\tfrac{1}{4}$$

Zatem $W = \left(\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{4}\right)$.

Obliczamy wartości funkcji h na krańcach przedziału $\langle -1;1 \rangle$.

$$h(-1) = (-1)^2 - (-1) = 1 + 1 = 2$$
$$h(1) = 1^2 - 1 = 1 - 1 = 0$$

Szkicujemy przybliżony wykres funkcji h.



Odczytujemy obraz przedziału $\langle -1;1 \rangle$ w odwzorowaniu h.

$$h(\langle -1;1 \rangle) = \langle -\tfrac{1}{4};2 \rangle$$

Jest to jednocześnie zbiór wszystkich wartości funkcji f.

Zatem $f(R) = \langle -\tfrac{1}{4};2 \rangle$

Równanie $(*)$ posiada rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy wyrażenie występujące po prawej stronie należy do zbioru wartości funkcji f.

Otrzymujemy:

$$6m \in \langle -\tfrac{1}{4};2 \rangle \Leftrightarrow \begin{cases} 6m \geq -\tfrac{1}{4} \\ 6m \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -\tfrac{1}{24} \\ m \leq \tfrac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow m \in \langle -\tfrac{1}{24};\tfrac{1}{3} \rangle$$

$Odp: m \in \langle -\tfrac{1}{24};\tfrac{1}{3} \rangle$

<u>Przykład 2.</u>

Dla jakich wartości parametru m równanie:

$$\sin^2 x - (3m-1)\sin x + 2m^2 - 2m = 0$$ posiada rozwiązanie?

Wyznaczamy dziedzinę równania:

$$D: x \in R$$

W powyższym równaniu wartość współczynnika przy funkcji trygonometrycznej, występującej w pierwszej potędze, zależy od parametru m. Nie możemy więc w tym przypadku zastosować procedury, którą posłużyliśmy się w poprzednim przykładzie.

Wprowadzamy zmienną pomocniczą $t = \sin x$.

Otrzymujemy:

$$(*)\ t^2 - (3m-1)t + 2m(m-1) = 0$$

Aby wyjściowe równanie posiadało rozwiązanie, równanie $(*)$ musi posiadać przynajmniej jeden pierwiastek należący do przedziału $\langle -1;1\rangle$.

Obliczamy wyróżnik trójmianu kwadratowego.

$$\Delta = [-(3m-1)]^2 - 4\cdot 2m(m-1) = (3m-1)^2 - 8m(m-1) = 9m^2 - 6m + 1 - 8m^2 + 8m =$$
$$= m^2 + 2m + 1 = (m+1)^2 \ge 0$$

Zatem równanie to posiada dla każdego $m \in R$ co najmniej jeden pierwiastek rzeczywisty.

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{(m+1)^2} = |m+1|$$

Wyznaczamy pierwiastki trójmianu kwadratowego.

$$t_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3m-1-|m+1|}{2}$$
$$t_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3m-1+|m+1|}{2}$$

Ze względu na postać pierwiastków trójmianu kwadratowego, można przyjąć, że:

$$t_1 = \frac{3m-1-(m+1)}{2} = \frac{3m-1-m-1}{2} = \frac{2m-2}{2} = \frac{2(m-1)}{2} = m-1$$
$$t_2 = \frac{3m-1+(m+1)}{2} = \frac{3m-1+m+1}{2} = \frac{4m}{2} = 2m$$

Równanie wyjściowe posiada rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$\begin{cases} a \ne 0 \\ \Delta \ge 0 \\ t_1 \in \langle -1;1\rangle \vee t_2 \in \langle -1;1\rangle \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \ne 0 \\ (m+1)^2 \ge 0 \\ -1 \le t_1 \le 1 \vee -1 \le t_2 \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \in R \\ m \in R \\ -1 \le m-1 \le 1 \vee -1 \le 2m \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$0 \le m \le 2 \vee -\tfrac{1}{2} \le m \le \tfrac{1}{2} \Leftrightarrow m \in \langle 0;2\rangle \vee m \in \langle -\tfrac{1}{2};\tfrac{1}{2}\rangle \Leftrightarrow m \in \langle -\tfrac{1}{2};2\rangle$$

$$Odp: m \in \langle -\tfrac{1}{2};2\rangle$$

<u>Przykład 3.</u>

Dla jakich wartości parametru m równanie:

$m\sin 6x - \cos 6x = 2m$ posiada rozwiązanie?

Wyznaczamy dziedzinę równania:

$$D: x \in R$$

Zastępujemy parametr m przez wartość cotangensa konkretnego kąta.

$$ctg(arcctgm)\sin 6x - \cos 6x = 2m$$

Wyrażamy cotangens kąta za pomocą sinusa i cosinusa tego kąta.

$$\frac{\cos(arcctgm)}{\sin(arcctgm)}\sin 6x - \cos 6x = 2m$$

Sprowadzamy wyrażenie występujące po lewej stronie równania do wspólnego mianownika.

$$\frac{\sin 6x\cos(arcctgm) - \sin(arcctgm)\cos 6x}{\sin(arcctgm)} = 2m$$

Dostrzegamy, iż licznik ułamka jest rozwiniętym sinusem różnicy kątów.

$$\frac{\sin(6x - arcctgm)}{\sin(arcctgm)} = 2m$$

W mianowniku zmieniamy postać wyrażenia cyklometrycznego, korzystając z tożsamości:

$$arcctgx = \arccos\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

Otrzymujemy:

$$\frac{\sin(6x - arcctgm)}{\sin\left(\arccos\frac{m}{\sqrt{1+m^2}}\right)} = 2m$$

Stosujemy tożsamość cyklometryczną:

$$\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$$

Mamy:

$$\frac{\sin(6x - arcctgm)}{\sqrt{1-\left(\frac{m}{\sqrt{1+m^2}}\right)^2}} = 2m \Leftrightarrow \frac{\sin(6x - arcctgm)}{\sqrt{1-\frac{m^2}{1+m^2}}} = 2m \Leftrightarrow \frac{\sin(6x - arcctgm)}{\frac{1}{\sqrt{1+m^2}}} = 2m \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{1+m^2}\sin(6x - arcctgm) = 2m$$

Współczynnik występujący po lewej stronie równania przyjmuje wartości dodatnie dla każdego $m \in R$.

Zatem: $$\sin(6x - arcctgm) = \frac{2m}{\sqrt{1+m^2}}$$

Definiujemy funkcję f:

$$f(x) = \sin(6x - arcctgm)$$

Zbiorem wszystkich wartości tej funkcji jest przedział $\langle -1;1\rangle$. Równanie ma więc rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy wyrażenie występujące po prawej stronie należy do tego przedziału.

Otrzymujemy warunek:

$$\frac{2m}{\sqrt{1+m^2}} \in \langle -1;1\rangle \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2m}{\sqrt{1+m^2}} \geq -1 \\ \frac{2m}{\sqrt{1+m^2}} \leq 1 \end{cases}$$

Powyższa koniunkcja jest równoważna nierówności modułowej

$$\left|\frac{2m}{\sqrt{1+m^2}}\right| \leq 1$$

Obie strony nierówności są nieujemne, zatem możemy w sposób równoważny podnieść oba wyrażenia do kwadratu.

$$\left|\frac{2m}{\sqrt{1+m^2}}\right|^2 \leq 1 \Leftrightarrow \left(\frac{2m}{\sqrt{1+m^2}}\right)^2 \leq 1 \Leftrightarrow \frac{4m^2}{1+m^2} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{4m^2}{m^2+1} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{4m^2}{m^2+1} - 1 \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{4m^2-(m^2+1)}{m^2+1} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{4m^2-m^2-1}{m^2+1} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{3m^2-1}{m^2+1} \leq 0 \Leftrightarrow (3m^2-1)(m^2+1) \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$3\left(m^2-\frac{1}{3}\right)(m^2+1) \leq 0 \Leftrightarrow 3\left(m+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\left(m-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)(m^2+1) \leq 0 \Leftrightarrow m \in \left\langle -\frac{\sqrt{3}}{3};\frac{\sqrt{3}}{3}\right\rangle$$

$$Odp: m \in \left\langle -\frac{\sqrt{3}}{3};\frac{\sqrt{3}}{3}\right\rangle$$

Poniżej zamieszczam zestaw zadań związanych z problematyką równań trygonometrycznych z parametrem, o zróżnicowanym stopniu trudności, wraz z odpowiedziami.

Zad.

Dla jakich wartości parametru m poniższe równania posiadają rozwiązanie?

$a)\ \sin^2 x + \cos x + m^2 = 0$

$Odp: m \in \langle -1;1 \rangle$

$b)\ 3\cos^2 x - 4\sin x + m - 3 = 0$

$Odp: m \in \langle -\frac{4}{3};7 \rangle$

$c)\ \cos 2x + 3\cos x - m = 0$

$Odp: m \in \langle -\frac{17}{8};4 \rangle$

$d)\ \cos 2x - 4\sin x - 2m + 1 = 0$

$Odp: m \in \langle -2;2 \rangle$

$e)\ \cos 2x + m\sin x + 7 = 2m$

$Odp: m \in \langle 2;6 \rangle$

$f)\ \cos^2 x + 2(m-1)\cos x - 8m^2 + 10m - 3 = 0$

$Odp: m \in \langle 0;1 \rangle$

$g)\ \sin^2 x - (3m-1)\sin^2 x + 2m^2 - 2m = 0$

$Odp: m \in \langle 0;\frac{1}{2} \rangle \cup \langle 1;2 \rangle$

$h)\ \cos^2 x + 2(m-1)\cos^2 x - 8m^2 + 10m - 3 = 0$

$Odp: m \in \langle \frac{3}{4};1 \rangle \cup \{\frac{1}{2}\}$

$i)\ \sin x + \sin(x + \frac{\pi}{3}) = m^2 - 2$

$Odp: m \in \left\langle -\sqrt{2+\sqrt{3}};-\sqrt{2-\sqrt{3}} \right\rangle \cup \left\langle \sqrt{2-\sqrt{3}};\sqrt{2+\sqrt{3}} \right\rangle$

$j)\ \sin x - \sin(x - \frac{2\pi}{3}) = m^2 - 5$

$Odp: m \in \left\langle -\sqrt{5+\sqrt{3}};-\sqrt{5-\sqrt{3}} \right\rangle \cup \left\langle \sqrt{5-\sqrt{3}};\sqrt{5+\sqrt{3}} \right\rangle$

$k)\ \cos x + \cos(x - \frac{\pi}{3}) = m^2 - 3$

$Odp: m \in \left\langle -\sqrt{3+\sqrt{3}};-\sqrt{3-\sqrt{3}} \right\rangle \cup \left\langle \sqrt{3-\sqrt{3}};\sqrt{3+\sqrt{3}} \right\rangle$

$l)\ \cos x - \cos(x + \frac{2\pi}{3}) = m^2 - 4$

$Odp: m \in \left\langle -\sqrt{4+\sqrt{3}};-\sqrt{4-\sqrt{3}} \right\rangle \cup \left\langle \sqrt{4-\sqrt{3}};\sqrt{4+\sqrt{3}} \right\rangle$

ł) $\sin^4 x + \cos^4 x = m^2 - 4$

$Odp: m \in \left\langle -\sqrt{5};-\frac{3\sqrt{2}}{2} \right\rangle \cup \left\langle \frac{3\sqrt{2}}{2};\sqrt{5} \right\rangle$

$m)\ \sin^4 6x + \cos^4 6x = m^2 - 2$

$Odp: m \in \left\langle -\sqrt{3};-\frac{\sqrt{10}}{2} \right\rangle \cup \left\langle \frac{\sqrt{10}}{2};\sqrt{3} \right\rangle$

$n)\ \sin^4 7x+\cos^4 7x=m^2-9$

$Odp: m\in\left\langle -\sqrt{10};-\frac{\sqrt{38}}{2}\right\rangle\cup\left\langle \frac{\sqrt{38}}{2};\sqrt{10}\right\rangle$

$o)\ \sin^4 2x+\cos^4 2x=m^2-1$

$Odp: m\in\left\langle -\sqrt{2};-\frac{\sqrt{6}}{2}\right\rangle\cup\left\langle \frac{\sqrt{6}}{2};\sqrt{2}\right\rangle$

$p)\ \sin^6 x+\cos^6 x=m^2-2$

$Odp: m\in\left\langle -\sqrt{3};-\frac{3}{2}\right\rangle\cup\left\langle \frac{3}{2};\sqrt{3}\right\rangle$

$q)\ \sin^6 7x+\cos^6 7x=m^2-5$

$Odp: m\in\left\langle -\sqrt{6};-\frac{\sqrt{21}}{2}\right\rangle\cup\left\langle \frac{\sqrt{21}}{2};\sqrt{6}\right\rangle$

$r)\ \sin^6 3x+\cos^6 3x=m^2-8$

$Odp: m\in\left\langle -3;-\frac{\sqrt{33}}{2}\right\rangle\cup\left\langle \frac{\sqrt{33}}{2};3\right\rangle$

$s)\ \sin^6 4x+\cos^6 4x=m^2-6$

$Odp: m\in\left\langle -\sqrt{7};-\frac{5}{2}\right\rangle\cup\left\langle \frac{5}{2};\sqrt{7}\right\rangle$

$t)\ \sin^8 x+\cos^8 x=m^2-4$

$Odp: m\in\left\langle -\sqrt{5};-\frac{\sqrt{66}}{4}\right\rangle\cup\left\langle \frac{\sqrt{66}}{4};\sqrt{5}\right\rangle$

$u)\ \sin^8 3x+\cos^8 3x=m^2-3$

$Odp: m\in\left\langle -2;-\frac{5\sqrt{2}}{4}\right\rangle\cup\left\langle \frac{5\sqrt{2}}{4};2\right\rangle$

$v)\ \sin^8 6x+\cos^8 6x=m^2-1$

$Odp: m\in\left\langle -\sqrt{2};-\frac{3\sqrt{2}}{4}\right\rangle\cup\left\langle \frac{3\sqrt{2}}{4};\sqrt{2}\right\rangle$

$w)\ \sin^8 5x+\cos^8 5x=m^2-7$

$Odp: m\in\left\langle -2\sqrt{2};-\frac{\sqrt{114}}{4}\right\rangle\cup\left\langle \frac{\sqrt{114}}{4};2\sqrt{2}\right\rangle$

$x)\ \sin 3x+m\cos 3x=5m$

$Odp: m\in\left\langle -\frac{\sqrt{6}}{12};\frac{\sqrt{6}}{12}\right\rangle$

$y)\ \sin 5x-m\cos 5x=4m$

$Odp: m\in\left\langle -\frac{\sqrt{15}}{15};\frac{\sqrt{15}}{15}\right\rangle$

$z)\ m\sin 2x+\cos 2x=3m$

$Odp: m\in\left\langle -\frac{\sqrt{2}}{4};\frac{\sqrt{2}}{4}\right\rangle$